Approximation en gradient du problème de Monge

Jean LOUET
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Luigi DE PASCALE
Università di Pisa

Filippo SANTAMBROGIO
Université Paris-Sud

Mots-clefs : Transport optimal, problème de Monge, Γ-convergence

Le problème du transport optimal consiste à minimiser l'énergie

$$T \mapsto \int c(x, T(x))\, \mathrm{d}\mu(x)$$

où $c(x, y)$ représente le coût du transport d'une unité de masse de x vers y et où l'on impose une contrainte de répartition: étant données deux densités de masse μ et ν, T doit vérifier l'égalité $\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$ pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$.

Lorsque le coût est directement donné par la distance $c(x, y) = |y - x|$ (problème de Monge, introduit au 18ème siècle), le fait que c soit une fonction non strictement convexe par rapport à la différence $y - x$ rend compliquée la structure de l'ensemble des solutions. On sait qu'il existe un ensemble de segments appelés *rayons de transport*, joignant le support de μ à celui de ν, tel qu'une fonction T vérifiant la contrainte soit optimal si et seulement si

pour μ-presque tout x, $T(x)$ et x appartiennent au même rayon de transport

et parmi ces transports, celui qui est *monotone* le long de chaque rayon de transport a reçu une attention particulière pour certaines de ses propriétés remarquables.

Dans cet exposé, on s'intéresse au problème de minimisation, parmi les transports entre μ et ν, de la fonctionnelle

$$J_\varepsilon : T \mapsto \int |T(x) - x|\, \mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon \int |DT|^2$$

et on étudie le comportement de cette famille de fonctionnelle lorsque $\varepsilon \to 0$, au sens de la Γ-convergence. Comme attendu, les transports sélectionnés à la limite sont ceux qui sont optimaux pour le problème de Monge et ont, parmi ces derniers l'énergie de Dirichlet minimale; la question qui se pose est alors le comportement de J_ε et de ses minimiseurs lorsqu'aucune telle application n'existe, *i.e.* lorsqu'il n'existe pas de transport optimal pour Monge appartenant à l'espace de Sobolev H^1.

On met alors en évidence, à travers l'examen détaillé d'une classe de tels exemples, plusieurs phénomènes surprenants. D'une part, l'application sélectionnée à la limite est un nouveau transport "spécial" de Monge, minimisant une énergie concentrée autour des singularités et pouvant éventuellement différer du transport monotone; d'autre part, on identifie précisément le développement asymptotique de la valeur minimale de J_ε, dont le terme dominant lorsque $\varepsilon \to 0$ est d'ordre $\varepsilon|\log \varepsilon|$.

Références

[1] L. De Pascale, J. Louet, F. Santambrogio, The Monge problem with vanishing gradient penalization: vortices and asymptotic profile, accepté pour publication dans *Jour. Math. Pures Appl.* (2015)