

Méthode de Lagrangian augmenté pour les flots de gradient dans l'espace de Wasserstein

Maxime Laborde

Université de Paris-Dauphine, France

Jean-David Benamou

INRIA, France

Guillaume Carlier

Université de Paris-Dauphine, France

Mots-clefs : formule de Benamou-Brenier, Lagrangian augmenté, flots de gradient, diffusion non-linéaire, mouvement de foule.

Depuis les travaux de Jordan, Kinderlehrer et Otto en 1998, [1], il est bien connu qu'une large classe d'équations paraboliques peuvent être vues comme des flots gradients dans l'espace de Wasserstein. Pour un pas de temps $h > 0$ fixé, on construit une suite par récurrence $(\rho_h^k)_k$, avec $\rho_h^0 = \rho_0 \in \mathcal{P}_2^{ac}(\Omega)$ et pour tout $k \geq 0$,

$$\rho_h^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}_2^{ac}(\Omega)} W_2^2(\rho, \rho_h^k) + 2h \int_{\Omega} (F(\rho) + V\rho), \quad (1)$$

où W_2 représente la distance de Wasserstein d'ordre 2. Alors l'interpolée par morceaux de cette suite, ρ_h , converge, au moins formellement, vers une solution de

$$\partial_t \rho - \operatorname{div}(\rho \nabla (F'(\rho) + V)) = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0.$$

Par exemple, si $V = 0$ et $F(x) = \frac{x^m}{m-1}$, avec $m > 1$, alors on retrouve l'équation des milieux poreux.

En utilisant la formule de Benamou-Brenier,

$$W_2^2(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{|m_t|^2}{\rho_t} dx dt : \partial_t \rho + \operatorname{div}(m) = 0, \rho|_{t=0} = \mu, \rho|_{t=1} = \nu \right\},$$

et une méthode de Lagrangian augmenté, on présentera un algorithme pour résoudre (1). Dans un premier temps, on testera cette méthode sur l'équation des milieux poreux. Puis, en utilisant un schéma de JKO semi-implicite, on traitera le cas de systèmes d'espèces en interaction. Pour finir, on appliquera cet algorithme aux systèmes de mouvement de foules avec diffusion. Ce travail est en collaboration avec Jean-David Benamou and Guillaume Carlier [2].

Références

- [1] R. JORDAN, D. KINDERLEHRER AND F. OTTO, *The Variational Formulation of the Fokker-Planck Equation*, SIAM J. of Math. Anal., VILLE, 1998.
- [2] J-D. BENAMOU, G. CARLIER AND M. LABORDE, *An augmented Lagrangian approach to Wasserstein gradient flows and applications*, work in progress, 2015.