# UNE APPROCHE OPERATEUR ACCRETIF POUR LES JEUX STOCHASTIQUES AVEC CRITERE ERGODIQUE

Antoine Hochart
CMAP, Ecole polytechnique & INRIA, France

**Mots-clefs :** Jeu stochastique, Jeu à somme nulle, Jeu à paiement moyen, Opérateur de Shapley, Opérateur accrétif, Théorème ergodique non linéaire, Equation ergodique.

Une question liée à l'étude des jeux stochastiques est de savoir quand le paiement moyen par unité de temps est indépendant de l'état initial. Une manière de l'aborder est de considérer l'*équation ergodique*. Quand l'espace d'état est fini, cette dernière s'écrit $T(u) = \lambda e + u$, où $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'opérateur de Shapley, $e$ est le vecteur unité de $\mathbb{R}^n$ et $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est un couple solution. Si un tel couple existe, le scalaire $\lambda$, appelé *constante ergodique*, donne le paiement moyen par unité de temps et le vecteur $u$, appelé *biais*, permet d'accéder à des stratégies optimales stationnaires. L'existence d'une paire $(\lambda, u)$ est liée à des conditions d'ergodicité qui sont généralement de nature structurelle, c'est-à-dire indépendantes de la valeur des paiements (conditions de type "accessibilité" par exemple). Plusieurs résultats, en théorie du contrôle, théorie des jeux, théorie des systèmes à évènements discrets ou théorie de Perron-Frobenius, fournissent des conditions suffisantes de solvabilité de l'équation ergodique pour toute perturbation des paiements ne dépendant que de l'état. Lorsqu'il en est ainsi, nous disons que le jeu est *ergodique*. Sous certaines hypothèses (paiements bornés, opérateur de Shapley "faiblement" convexe, etc.) ces conditions sont aussi nécessaires.

Une seconde question concerne la structure de l'espace des biais. Dans le cas d'un joueur (problèmes de contrôle optimal), des caractérisations précises ont été données, aussi bien dans le cas discret que continu, déterministe que stochastique. Le cas de deux joueurs se révèle beaucoup moins accessible, et comprendre les situations dans lesquelles il y a unicité du biais (à une constante additive près) est déjà très intéressant. Dans un précédant travail [1], nous avons démontré l'unicité pour une perturbation générique des paiements pour les jeux ergodiques à information parfaite et espaces d'action finis.

Dans le présent travail, nous appliquons la théorie des opérateurs accrétifs à l'étude des jeux à somme nulle. En exploitant uniquement le caractère accrétif de l'opérateur $Id - T$, nous parvenons à une condition nécessaire et suffisante pour qu'un jeu stochastique à espace d'état fini soit ergodique, condition qui peut s'exprimer en termes d'ensembles invariants pour une paire d'hypergraphes orientés [2]. En particulier, cela raffine un résultat de Gaubert et Gunawardena [3] en théorie de Perron-Frobenius non linéaire. Sous cette condition, nous établissons également l'unicité du biais pour une perturbation générique des paiements, sans autre hypothèse que la finitude de l'espace d'état.

## Références

[1] M. Akian, S. Gaubert, A. Hochart, Generic uniqueness of the bias vector of mean payoff zero-sum games, *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1581–1587, Los Angeles, USA, 2014, arXiv:1411.1211.

[2] M. Akian, S. Gaubert, A. Hochart, Hypergraph conditions for the solvability of the ergodic equation for zero-sum games, *54th IEEE Conference on Decision and Control*, Osaka, Japan, 2015, à paraître, arXiv:1510:05396.

[3] S. Gaubert, J. Gunawardena, The Perron-Frobenius theorem for homogeneous, monotone functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(12):4931–4950, 2004.