Homogénéisation stochastique des équations de Hamilton-Jacobi non convexes: un contre-exemple.

Bruno Ziliotto
Université Paris Dauphine

Mots-clefs : équations de Hamilton-Jacobi, homogénéisation stochastique, jeux différentiels, jeux répétés avec un contrôleur.

Considérons des équations de Hamilton-Jacobi de la forme

$$\partial_t u(x,t,\omega) + H(Du, \frac{x}{\epsilon}, \omega) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \tag{1}$$

avec $n \geq 1$, $\epsilon > 0$, un Hamiltonien $H(p,x,\omega)$ continu en (p,x), coercif et Lipschitz par rapport à p, et dépendant d'un aléa ω appartenant à un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La loi de H est supposée stationnaire et ergodique. Une question centrale de la littérature est l'étude des propriétés de convergence de la solution de viscosité u^ϵ de l'équation ci-dessus, soumise à des conditions initiales appropriées, lorsque ϵ tend vers 0. Souganidis [4] (voir aussi [1, 2, 5] pour le cas visqueux) a démontré que lorsque H est supposé convexe par rapport à p, alors u^ϵ converge presque sûrement vers l'unique solution d'une équation déterministe

$$\partial_t u(x,t) + \bar{H}(Du) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$$

avec les mêmes conditions initiales, où H est le *hamiltonien effectif.* On parle alors d'*homogénéisation stochastique.* Armstrong, Cardaliaguet et Souganidis [3] ont étudié la vitesse de convergence.
La question de l'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi dans le cas général où H n'est pas convexe en p était restée ouverte, et est souvent mentionnée dans la littérature, comme par exemple dans [1, 2].
Dans cette communication, on résout négativement cette question en présentant un exemple d'équation de Hamilton-Jacobi de la forme (1), en dimension 2, telle que l'homogénéisation n'a pas lieu. Cette équation provient d'un jeu différentiel. La non-homogénéisation s'interprète ainsi comme la non-convergence de la valeur du jeu différentiel de durée T, lorsque T tend vers l'infini.

Références

[1] P.-L. Lions, P. Souganidis, *Comm. Partial Differential Equations. Homogenization of "viscous" Hamilton-Jacobi equations in stationary ergodic media*, 2005.

[2] P.-L. Lions, P. Souganidis, *Commun. Math. Sci. Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi and "viscous"-Hamilton-Jacobi equations with convex nonlinearities—revisited*, 2010.

[3] S. Armstrong, S., P. Cardaliaguet, P. Souganidis, *J. Amer. Math. Soc. Error estimates and convergence rates for the stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations*, 2014.

[4] P. Souganidis, *Asymptot. Anal. Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations and some applications*, 1999.

[5] E. Kosygina, F. Rezakhanlou, S. Varadhan, *Comm. Pure Appl. Math. Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, 2006.