Transport optimal non-équilibré et la métrique de Wasserstein-Fisher-Rao

Lénaïc CHIZAT
Université Paris Dauphine, France

Le problème du transport optimal est défini pour des marginales de même masse totale. Dans les applications (notamment en traitement d'image), cette contrainte est parfois indésirable. Nous proposons un cadre général qui étend la théorie du transport optimal à des marginales de masses totales différentes [1]. À la différence du cadre standard dans lequel on se donne une fonction de coût $c : \Omega^2 \to \mathbb{R}_+$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on choisit ici une fonction $c : (\Omega \times \mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$ qui donne le coût d'apparier deux masses de Dirac, en fonction de leurs positions et de leurs masses respectives. Pour une fonction de coût c (sous-linéaire en les variables de masse) et des mesures $(\mu, \nu) \in \mathcal{M}_+(\Omega)^2$, on formule la variante du problème de Kantorovich suivante

$$C(\mu,\nu) := \inf \left\{ \int_{\Omega^2} c((x, m_\mu(x,y)), (y, m_\nu(x,y)))\mathrm{d}\gamma(x,y) : \pi^x_\#(m_\mu\gamma) = \mu,\, \pi^y_\#(m_\nu\gamma) = \nu \right\} \quad (\mathcal{K})$$

où les variables sont $(m_\mu\gamma, m_\nu\gamma) \in \mathcal{M}_+(\Omega^2)^2$ et où $\pi^x_\#$ et $\pi^y_\#$ sont les opérateurs de projection sur les marginales. Notre principal résultat consiste à montrer que pour certaines fonctions de coût, $(\mathcal{K})$ admet une formulation dynamique à la Benamou-Brenier. L'appellation "dynamique" vient du fait que l'on minimise l'énergie d'une interpolation entre μ et ν, au cours de laquelle l'interpolée ρ_t subit à chaque instant t à la fois un déplacement (décrit par la quantitée de mouvement ω_t) et une variation de masse (donnée par ζ_t). Pour une fonction f sous-linéaire mesurant l'énergie, ce problème s'écrit

$$\inf_{\rho,\omega,\zeta} \left\{ \int_0^1 \int_\Omega f(\rho_t(x), \omega_t(x), \zeta_t(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t : \partial_t\rho + \nabla\cdot\omega = \zeta, \quad \rho_{t=0} = \mu, \quad \rho_{t=1} = \nu \right\}. \qquad (\mathcal{D})$$

Nous montrons que les problèmes convexes $(\mathcal{K})$ et $(\mathcal{D})$ atteignent leur minimum, admettent des formulations duales et permettent de construire des métriques sur $\mathcal{M}_+(\Omega)$. Nous étudions des exemples qui rentrent dans ce cadre, notamment le transport optimal partiel ou la métrique de Wasserstein-Fisher-Rao [2], laquelle se distingue par l'interprétation Riemannienne que l'on peut en tirer. Enfin, nous décrivons des méthodes numériques pour résoudre $(\mathcal{K})$ et $(\mathcal{D})$.

Figure 1: Géodésique pour la métrique de Wasserstein-Fisher-Rao entre une mesure μ (à gauche) et ν (à droite). Images obtenues en résolvant numériquement un problème de type $(\mathcal{D})$ avec l'algorithme de Douglas-Rachford.

Références

[1] L. Chizat, G. Peyré, B. Schmitzer, F-X. Vialard *Unbalanced Optimal Transport: Geometry and Kantorovich Formulation, Submitted.*, arXiv:1508.05216, 2015

[2] L. Chizat, G. Peyré, B. Schmitzer, F-X. Vialard *An Interpolating Distance between Optimal Transport and Fisher-Rao, Submitted.*, arXiv:1506.06430, 2015