Applications du transport optimal dans les jeux à potentiel

Adrien BLANCHET
Université Toulouse 1 Capitole, France

Guillaume CARLIER
Université Paris-Dauphine, France

Mots-clefs : transport optimal, jeux à potentiel

On s'intéressera à une situation dans laquelle les agents doivent décider où habiter lorsqu'ils arrivent dans une nouvelle ville. L'agent peut, par exemple, vouloir s'installer plutôt en centre ville parce que c'est l'endroit d'où il aura, en moyenne, le moins de chemin à parcourir pour interagir avec ses futurs relations. Par contre il faut aussi prendre en compte le fait qu'en centre ville, la compétition est plus grande et donc les appartements plus petits ou plus chers.
Mathématiquement, On considère un jeu non-coopératif, non-atomique, anonyme avec un continuum de joueurs. Mathématiquement, soient l'espace X du type des agents, l'espace Y des actions et un coût $c(x, y)$ qui mesure le coût d'un agent de type x à prendre une action y. La distribution du type des agents $\mu\mathcal{P}(X)$ étant donné, un agent de type x qui entreprend une action y paie le coût $\Gamma(x, y, \lambda)$ où λ est la distribution des actions de l'ensemble des joueurs.
La question est de déterminer l'"équilibre" de Nash (= la situation dans laquelle personne n'a intérêt à déménager). Dans une situation très schématique, il est possible de déterminer les équilibres, en utilisant les derniers développements de la théorie du transport optimal.
En fait on prouve, sous des conditions assez générales, qu'il existe un unique équilibre et qu'il peut être vu comme le minimiseur de la fonctionnelle :

$$J_\mu[\nu] := \mathcal{W}_c(\mu, \nu) + \mathcal{E}[\nu]$$

où $\mathcal{W}_c(\mu, \nu)$ est la distance de Monge-Kantorovich entre μ et ν pour le coût c et $\mathcal{E}$ est typiquement de la forme

$$\mathcal{E}[\nu] := \int_{\mathcal{C}} V[\nu(x)]\,\mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}} A(y)\lambda(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} \phi(y-z)\lambda(y)\lambda(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z/;.$$

La fonctionnelle n'est pas convexe au sens classique mais elle l'est le long des géodésique généralisées au sens du transport optimal. Nous caractérisons les équilibres en terme d'une équation de Monge-Ampère qu'il est possible de les simuler numériquement en 1d. On calcule aussi les taxes qui permettent de rétablir l'efficacité du jeu. On introduit pour finir la dynamique type "descente de gradient dans la métrique de Monge-Kantorovich" associée à ce problème.

Références

[1] A. Blanchet, P. Mossay, F. Santambrogio *Existence and uniqueness of equilibrium for a spatial model of social interactions*, International Economic Review, 2016.

[2] A. Blanchet, G. Carlier, .M. Phasellus, O. Aliquam, *Optimal transport and Cournot-Nash equilibria*, Mathematics of Operations Research, 2016.