

Minimisation du temps de crise et applications

Térence Bayen (Université de Montpellier)

(en collaboration avec Alain Rapaport, INRA Supagro)

JOURNÉES MODE 2016

23 mars 2016



Plan

1 Introduction

2 Régularisation du temps de crise et résultat de convergence

- Hybrid Maximum Principle
- Moreau-Yosida approximation

3 Exemples et applications

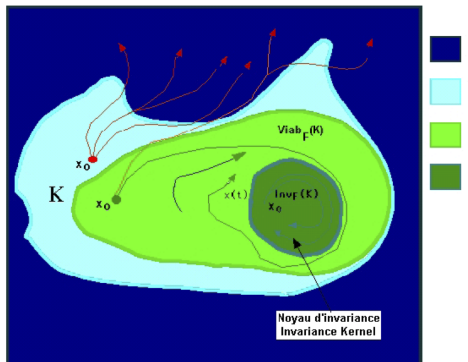
- Un exemple académique
- Réacteur biologique à deux espèces

Motivation : théorie de la viabilité

- Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non-vide.
- Soit le problème avec contraintes d'état:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

$$x(t) \in K \quad \forall t \geq 0$$



Definition

- Le noyau de viabilité de K est $Viab_K(f) := \{x_0 \in K ; \exists u \in \mathcal{U}, x_u(t, x_0) \in K \quad \forall t \geq 0\}$.
- Le noyau d'invariance de K est $Inv_K(f) := \{x_0 \in K ; \forall u \in \mathcal{U}, x_u(t, x_0) \in K \quad \forall t \geq 0\}$.

Le problème du temps de crise

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J^T(u) \quad \text{avec} \quad J^T(u) := \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) \, dt$$

(\mathcal{P})

où :

- $x_u(\cdot)$ est l'unique solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

- l'ensemble des contrôles admissibles est:

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ mes.}\}.$$

- K est fermé, d'intérieur non-vide et

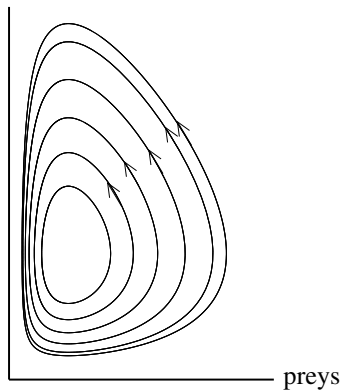
$$\mathbb{1}_{K^c}(x) := \begin{cases} 0 & x \in K, \\ 1 & x \notin K. \end{cases}$$

Exemple proie-prédateur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - ax(t)y(t) & \text{proies} \\ \dot{y}(t) = -dy(t) + bx(t)y(t) & \text{predateurs} \end{cases}$$

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* ; x \geq \underline{x}\}.$$

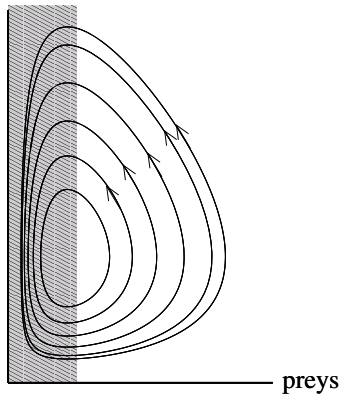
predators



Exemple proie-prédateur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - ax(t)y(t) & \text{proies} \\ \dot{y}(t) = -dy(t) + bx(t)y(t) - u(t)y(t) & \text{predateurs} \end{cases}$$

predators

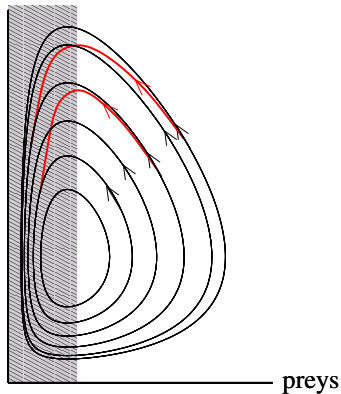


crisis

Exemple proie-prédateur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - ax(t)y(t) & \text{proies} \\ \dot{y}(t) = -dy(t) + bx(t)y(t) - u(t)y(t) & \text{predateurs} \end{cases}$$

predators



crisis

Objectifs et références

- Conditions nécessaires sur *la fonction temps de crise* : $\inf_{u \in \mathcal{U}} \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt$?
- Régularisation (simulations numériques).
- Exemples de synthèse de feedback (chemostat).



J. F. Bonnans, C. Moreno, Ch. Saguez, *Contrôle de domaines temporels*, INRIA research report 1984, <https://hal.inria.fr/inria-00076249>.



J.F. Bonnans, V. Gaudrat, C. Saguez, *A domain control approach to state constrained control problems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences n° 100, J.P. Zolesio ed., Springer-Verlag, Berlin, 72-90, 1988.

- Equations paraboliques linéaires (application à la coulée continue) ; méthode de régularisation ; critère : $\sup\{t ; x_u(t) \in K\} - \inf\{t ; x_u(t) \notin K\}$.



L. Doyen, P. Saint-Pierre, *Scale of viability and minimal time of crisis*, Set-Valued Analysis 5, pp. 227–246, 1997.

- Caractérisation de la fonction valeur comme l'épigraphe d'un problème augmenté. La fonction temps minimale = le temps de crise si K est viable.

Plan

1 Introduction

2 Régularisation du temps de crise et résultat de convergence

- Hybrid Maximum Principle
- Moreau-Yosida approximation

3 Exemples et applications

- Un exemple académique
- Réacteur biologique à deux espèces

Hypothèses

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{P} : \inf_{u \in \mathcal{U}} J^T(u) := \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \quad \text{a.e. } t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

où $\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ mes.}\}$.

(H1) L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est non vide et **compact**.

(H2) La dynamique f est continue p.r. à (x, u) , de classe C^1 p.r. à x et satisfait la condition de croissance : $\exists c_1 > 0 \exists c_2 > 0$ t.q. $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$, on a :

$$\|f(x, u)\| \leq c_1 \|x\| + c_2.$$

(H3) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) := \{f(x, u) ; u \in U\}$ est un ensemble convexe non-vide de \mathbb{R}^n .

(H4) L'ensemble K est un compact **convexe** non vide de \mathbb{R}^n .

Existence d'un contrôle optimal

Proposition

Il existe un contrôle optimal au problème (\mathcal{P}) .

Preuve : Soit la multi-application G from \mathbb{R}^{n+1} dans les sous-ensembles de \mathbb{R}^{n+1} :

$$G(z) := \begin{cases} f(x, U) \times \{0\} & \text{if } x \in \text{Int}(K), \\ f(x, U) \times [0, 1] & \text{if } x \in \partial K, \\ f(x, U) \times \{1\} & \text{if } x \in K^c, \end{cases}$$

où $z = (x, y)$. On utilise des arguments de [compacité](#).

Points de croisement

Definition

On dit qu'un instant $t_c \in [0, T]$ est un *point de croisement régulier* si

- (i) Le point $x(t_c)$ est tel que $x(t_c) \in \partial K$, et il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [t_c - \eta, t_c)$, resp. $t \in (t_c, t_c + \eta]$, on a $x(t) \in K$, resp. $x(t) \in K^c$.
- (ii) Le contrôle u associé à la trajectoire x est continue à gauche et à droite au point t_c .
- (iii) La trajectoire est *transverse* à l'ensemble K au point $x(t_c)$.
(i.e. $\forall h^* \in N_K(x)$ tel qu'il existe $h \in T_K(x(t_c)) \setminus R_K(x)$ avec $h^* \cdot h = 0$, on a: $h^* \cdot f(x(t_c), u(t_c)) \neq 0$.)

(H') Toute trajectoire optimale $(x(\cdot), u(\cdot))$ a soit zéro ou un nombre fini $m \geq 1$ de points de croisement réguliers $\{t_1, \dots, t_m\}$ sur $[0, T]$.

Principe du maximum hybride

Proposition

On suppose (H') vérifiée et soit $\mathcal{T}_c := \{t_1, \dots, t_m\}$ les points de croisement. Alors :

- $\exists p_0 \leq 0, p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.q. $(p_0, p(\cdot)) \neq 0$
- Equation adjointe:

$$\dot{p}(t) = -\partial_x H(x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad p.p. t \in [0, T].$$

- $u(t) \in \arg \max_{v \in U} H(x(t), p(t), p^0, v)$ p.p. $t \in [0, T]$.
- Condition de transversalité : $p(T) = 0$.
- Le Hamiltonien est constant le long de l'extrémale.
- A un instant $t_i \in \mathcal{T}_c$, on a:

$$p(t_i^+) - p(t_i^-) \in N_K(x(t_i)).$$

Ou encore : $\exists h \in N_K(x(t_c))$ t.q.:

$$p(t_i^+) = p(t_i^-) + \frac{p(t_i^-) \cdot (f(x(t_i), u(t_i^-)) - f(x(t_i), u(t_i^+))) + \sigma p_0}{h \cdot f(x(t_i), u(t_i^+))} h$$

où $\sigma = \pm 1$.

Problème régularisé

On considère le problème régularisé:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J_\varepsilon(u) := \int_0^T \gamma(e_\varepsilon(x_u(t))) dt \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

- avec $\gamma(v) = 1 - e^{-v}$; $\mathbb{1}_{K^c}(x) = \gamma(\chi_K(x))$ et χ_K est la fonction caractéristique de K :

$$\chi_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in K, \\ +\infty & \text{if } x \notin K. \end{cases}$$

- On suppose K convexe \implies l'enveloppe de Moreau de K :

$$x \mapsto e_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon} d(x, K)^2$$

est de classe $C^{1,1}$.

- On a la propriété $\gamma(e_\varepsilon(x)) \rightarrow \mathbb{1}_{K^c}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

Principe du maximum de Pontryagin

- Transformation de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ en un **problème de Mayer**:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon &= f(x_\varepsilon, u) \\ \dot{y}_\varepsilon &= \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} \|x_\varepsilon - w\|^2 \right) \end{cases} \rightarrow \inf_{(u(\cdot), w(\cdot))} y_\varepsilon(T)$$

où $v : [0, T] \rightarrow K$ est mesurable et $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Soit H_ε le Hamiltonien:

$$H_\varepsilon(x, p, u, v) = p \cdot f(x, u) - \gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon} \|x - w\|^2 \right),$$

Proposition

Soit $(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$ une paire optimale. Alors, le PMP s'écrit:

- $\exists p_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue t.q.:

$$\dot{p}_\varepsilon(t) = -\partial_x H_\varepsilon(x_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \quad \text{et} \quad p_\varepsilon(T) = 0.$$

- On a la condition de maximisation:

$$(u_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) \in \arg \max_{(v, w) \in U \times K} H_\varepsilon(x_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t), v, w) \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

- H_ε est constant le long d'une extrémale.

Convergence du système état-adjoint

Théorème

Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $(x_n(\cdot), p_n(\cdot), u_n(\cdot))$ une solution de $\mathcal{P}_{\varepsilon_n}$. Alors, à une sous-suite près:

- $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers une fonction $x^*(\cdot)$ a.c. qui est une [solution du problème \$\mathcal{P}\$](#) .
- $\dot{x}_n(\cdot)$ converge faiblement dans L^2 vers $\dot{x}^*(\cdot)$.

En outre si (H') est vérifiée:

- $p_n(\cdot)$ est uniformément bornée sur $[0, T]$.
- $p_n(\cdot)$ converge uniformément vers $p^*(\cdot)$ sur tout compact de $[0, T] \setminus \mathcal{T}_C$.
- $\dot{p}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{p}^*(\cdot)$.

où $\mathcal{T}_C := \{t_1, \dots, t_m\}$, $p^*(\cdot)$ est a.c. sur $[0, T] \setminus \mathcal{T}_C$ et $(x^*(\cdot), p^*(\cdot), u^*(\cdot))$ satisfait le [HMP](#).

Convergence de la variable d'état

- $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers une fonction $x^*(\cdot)$ a.c. qui est une **solution du problème \mathcal{P}** .
- $\dot{x}_n(\cdot)$ converge faiblement dans L^2 vers $\dot{x}^*(\cdot)$.

Preuve

Etape 1 : Compacité.

Etape 2 : Soit l'application

$$g(x, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \text{Int}(K), \\ v & \text{if } x \in \partial K, \\ 1 & \text{if } x \notin K. \end{cases}$$

On construit trois suites $a_n(\cdot)$, $b_n(\cdot)$ et v_n t.q. :

$$\gamma \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} d(x_n(t), K)^2 \right) = g(x_n(t) + a_n(t), v_n(t)) + b_n(t)$$

Convergence de la variable d'état

- Soit $\lambda_n \rightarrow 0$ t.q. $\lambda_n/\varepsilon_n^2 \rightarrow +\infty$ et soit $K_n := K + B(0, \lambda_n)$

$x^*(t)$	$a_n(t)$	$b_n(t)$	$v_n(t)$
K	0	0	0
K_n^c	0	$-e^{-\frac{1}{2\varepsilon_n}d(x^*(t),K)^2}$	0
$K_n \setminus K$	$P_K(x^*(t)) - x^*(t)$	0	$\gamma\left(\frac{1}{2\varepsilon_n}d(x^*(t),K)^2\right)$

$$\Rightarrow \gamma\left(\frac{1}{2\varepsilon_n}d(x_n(t),K)^2\right) = g(x_n(t) + a_n(t), v_n(t)) + b_n(t) := \alpha_n(t)$$

- Alors, la fonction coût s'écrit:

$$J_{\varepsilon_n}^T(u_n) = \int_{x^*(t) \in \text{int}K} \alpha_n(t) dt + \int_{x^*(t) \in \partial K} \alpha_n(t) dt + \int_{x^*(t) \notin K} \alpha_n(t) dt + \int_0^T b_n(t) dt$$

$$\rightarrow \int_{x^*(t) \in \text{int}K} 0 dt + 0 + \int_{x^*(t) \notin K} 1 dt + 0$$

(en utilisant que $a_n(t) \rightarrow 0$ et $b_n(t) \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, T]$).

Convergence de la variable adjoint

Etape 1: variations aiguille [Haberkorn-Trélat, '11] : la suite $(p_n(\cdot))$ est **bornée** dans $L^\infty([0, T])$.

$$\dot{p}_n(t) = -p_n(t) \cdot D_x f(x_n(t), u_n(t)) + \frac{1}{\varepsilon_n} e^{-\frac{\|x_n(t) - P_K(x_n(t))\|^2}{2\varepsilon_n}} (x_n(t) - P_K(x_n(t))), \quad p_n(T) = 0$$

Etape 2 : *on utilise la condition "transverse" (H')*

Let $I_\eta = [0, T] \setminus \bigcup_{t_c \in \mathcal{T}_C} \mathbb{B}(t_c, \eta)$.

Alors $\forall \eta > 0$, il existe une sous-suite t.q $p_n(\cdot)$, resp. $\dot{p}_n(\cdot)$ converge unif., resp. faiblement vers $p^\eta(\cdot)$, resp. $\dot{p}^\eta(\cdot)$ on I_η . De plus, $p^\eta(\cdot)$ satisfait l'équation adjointe sur I_η .

Etape 3 : soit $t_c \in \mathcal{T}_C$ et soit $t_n^+, t_n^- \rightarrow t_c$ t.q. $t_n^- < t_c < t_n^+$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n(t_n^+) - p_n(t_n^-)) \in N_K(x^*(t_c))$$

En effet, il suffit d'intégrer l'équation adjointe sur $[t_n - \varepsilon_n, t_n + \varepsilon_n]$ ce qui donne :

$$\exists t'_n \in (t_n - \varepsilon_n, t_n + \varepsilon_n) \text{ t.q. } p_n(t_n + \varepsilon_n) - p_n(t_n - \varepsilon_n) = o(1) + \rho_n \frac{x_n(t'_n) - P_K(x_n(t'_n))}{\|x_n(t'_n) - P_K(x_n(t'_n))\|} \text{ avec } (\rho_n) \text{ bornée.}$$

Plan

1 Introduction

2 Régularisation du temps de crise et résultat de convergence

- Hybrid Maximum Principle
- Moreau-Yosida approximation

3 Exemples et applications

- Un exemple académique
- Réacteur biologique à deux espèces

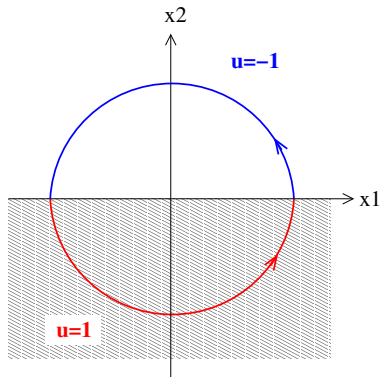
Un exemple académique

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt$$

où :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t)(2 + u(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)(2 + u(t)), \end{cases} \quad u(t) \in [-1, 1], \quad K = \{x_2 \geq 0\}$$

Stratégie intuitive



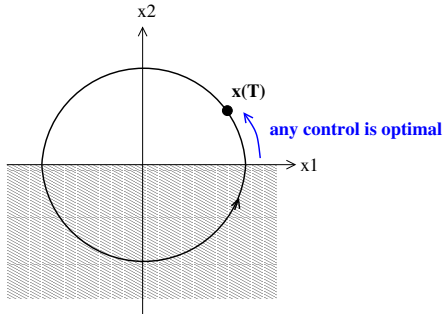
Stratégie myope

Definition

La stratégie *myope* correspond au feedback autonome

$$u_m[x] := \begin{cases} 1 & x \notin K \\ -1 & x \in K \end{cases}$$

- Mais un contrôle optimal n'est pas unique.



Etude du problème non régularisé

Proposition

La stratégie myope est optimale.

Preuve. Le système se réécrit

$$\dot{\theta} = 2 + u.$$

Etape 1. Soit u^* un contrôle optimal. Par le HMP on a :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^*(t) \notin K \text{ et } x^*(T) \in K \\ -1 & \text{si } x^*(t) \in K \text{ et } x^*(T) \notin K \end{cases}$$

Etape 2. (i) Si $x^*(T) \in K$, on a:

$$J^T(u^*) - J^T(u_m) = \frac{1}{3} \int_{\theta_m(T)}^{\theta_{u^*}(T)} \mathbb{1}_{K^c}(\theta) d\theta \geq 0$$

(ii) Si $x^*(T) \notin K$, on a

$$J^T(u^*) - J^T(u_m) = \frac{1}{3} \left(\theta_m(T) - \theta_{u^*}(T) - \int_{\theta_{u^*}(T)}^{\theta_m(T)} \mathbb{1}_{K^c}(\theta) d\theta \right) \geq 0$$

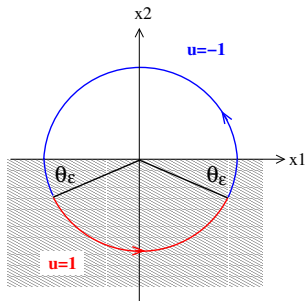
Etude du problème régularisé

$$\inf_{u(\cdot)} J_\varepsilon^T(u) := \int_0^T \left(1 - e^{-\frac{\min(x_2(t), 0)^2}{2\varepsilon}} \right) dt$$

Proposition

Soit $x_\varepsilon^*(\cdot)$ une trajectoire optimale pour \mathcal{P}_ε .

- Si $x_\varepsilon^*(T) \in K$, alors la stratégie **myope** est optimale.
- Si $x_\varepsilon^*(T) \notin K$, alors $\exists \theta_\varepsilon \in (0, \pi)$ t.q. la stratégie **retardée** soit optimale.



Convergence de la fonction valeur

Proposition

- *Le coût de la stratégie myope (\mathcal{P}_ε) est :*

$$V_\varepsilon(t_0, x_0) = W_\varepsilon\left(|x_0|, t_0 + \pi - \mathcal{A}(x_0) - \frac{2[\pi - \mathcal{A}(x_0)]^-}{3}\right) - \zeta_\varepsilon(|x_0|, [\mathcal{A}(x_0) - \pi]^+)$$

- *La fonction valeur V de (\mathcal{P}) s'écrit :*

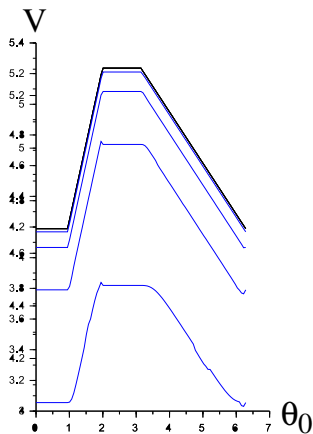
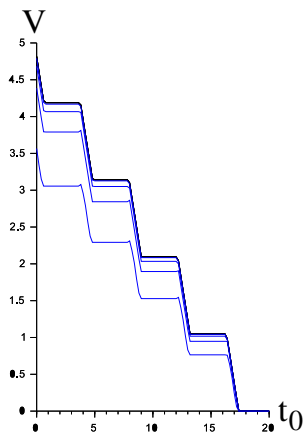
$$V(t_0, x_0) = W\left(t_0 + \pi - \mathcal{A}(x_0) - \frac{2[\pi - \mathcal{A}(x_0)]^-}{3}\right) + \frac{[\pi - \mathcal{A}(x_0)]^-}{3}.$$

- *On a $V_\varepsilon(t_0, x_0) \rightarrow V(t_0, x_0)$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.*

$$\begin{cases} \zeta_\varepsilon(r, \theta) := \frac{1}{3} \int_0^\theta \left(1 - e^{-\frac{r^2 \sin^2(\pi+s)}{2\varepsilon}}\right) ds, \\ W_\varepsilon(r, t) := \mathbb{E}\left(\frac{3[T-t]^+}{4\pi}\right) \zeta_\varepsilon(r, \pi) + \zeta_\varepsilon\left(r, \min\left(4\text{Fr}\left(\frac{3[T-t]^+}{4\pi}\right), 1\right)\pi\right), \\ W(t) := \frac{\pi}{3} \left[\mathbb{E}\left(\frac{3[T-t]^+}{4\pi}\right) + \min\left(4\text{Fr}\left(\frac{3[T-t]^+}{4\pi}\right), 1\right)\right]. \end{cases}$$

Convergence de la fonction valeur

Fig : convergence de $V_\varepsilon(t_0, x_0)$ vers $V(t_0, x_0)$.



Compétition dans le chemostat à deux espèces

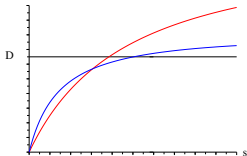
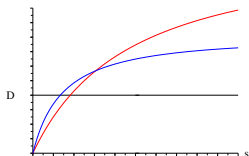
Etant donné $s_{in} - s_e < x_1^*$, soit $K := \{(x_1, x_2, s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times (0, s_{in}) ; x_1 > x_1^*\}$ et le problème:

$$\inf_{u(t) \in [0, u_{max}]} \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_1(t), x_2(t), s(t)) dt \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1(s)x_1 - u(t)x_1 \\ \dot{x}_2 = \mu_2(s)x_2 - u(t)x_2 \\ \dot{s} = -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + u(t)(s_{in} - s) \end{cases}$$

Propriété

Soit $s_e \in (0, s_{in})$ l'unique point tel que $\mu_1(s_e) = \mu_2(s_e)$. Si $u(t) = D$ est constant, alors

- $D < \mu_1(s_e) \Rightarrow x_2(t) \rightarrow s_{in} - \mu_2^{-1}(D)$ et $x_1(t) \rightarrow 0$.
- $D > \mu_1(s_e) \Rightarrow x_1(t) \rightarrow s_{in} - \mu_1^{-1}(D)$ et $x_2(t) \rightarrow 0$.



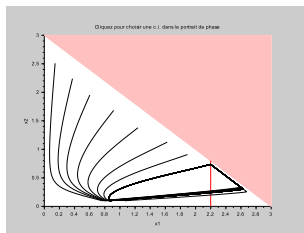
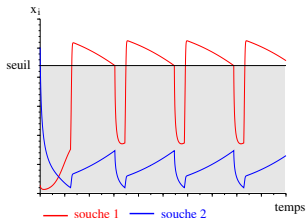
- Mais on a $D > \mu_1(s_e) \Rightarrow s_{in} - \mu_1^{-1}(D) < s_{in} - s_e < x_1^*$!

Problème du temps de crise

Lemme (retard à la bifurcation)

- Le noyau de viabilité de $K := \{(x_1, x_2, s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times (0, s_{in}) ; x_1 > x_1^*\}$ est vide.
- Pour toute condition initiale $(x_1^0, x_2^0, s_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times (0, s_{in})$, $\exists u : [0, T] \rightarrow [0, u_{max}]$ tel que:

$$|\{t \in [0, T] ; x(t) \in K\}| > 0.$$



⇒ Intérêt du temps de crise : optimiser le temps passé au-dessus du seuil.

Conclusions et Perspectives

Conclusions :

- Convergence de la suite d'extrémale $(x_n(\cdot), p_n(\cdot), u_n(\cdot))$ vers une extrémale de (\mathcal{P})
- La méthode de régularisation ne demande pas d'hypothèses sur (x^*, u^*) et fournit une méthode numérique.

Perspectives :

- Autres approches pour $\mathbb{1}_{K^c}$? Etude lorsque K n'est pas convexe.
- Détermination d'un feedback dans la classe des commandes périodiques (Lotka-Volterra, Chemostat avec compétition entre espèces).



T. Bayen, A. Rapaport, *About Moreau-Yosida regularization of the minimal time crisis problem*, to appear in *Journal of Convex Analysis*, vol. 23, 2016.