

## Journées SMAI-MODE 2016 - 24/03/2016

---

### Minimisation globale d'une somme de fractions rationnelles

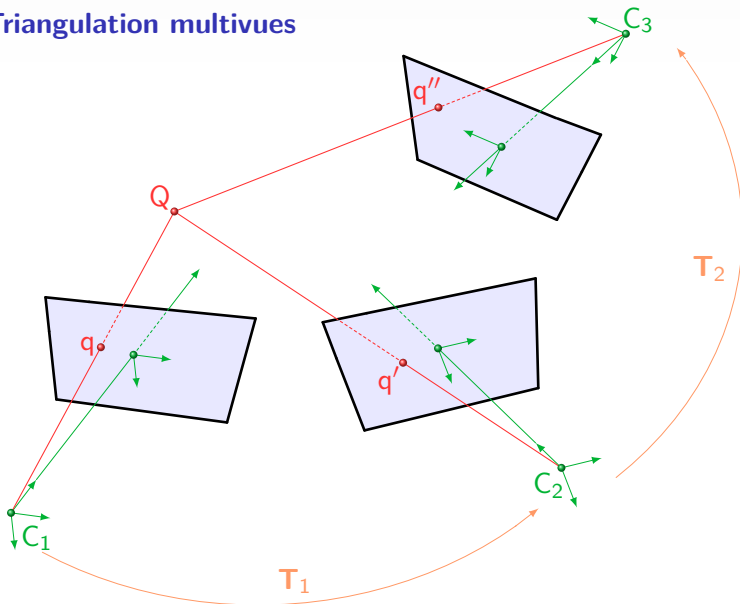
Florian Bugarin   Jean-Bernard Lasserre   Didier Henrion



# Sommaire

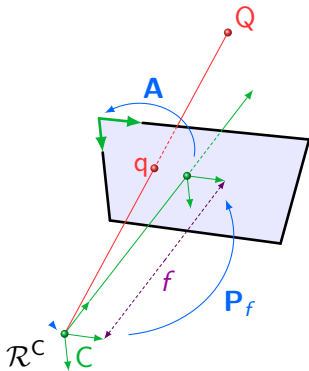
- 1 Contexte
  - Motivations
  - Types de fonctions étudiées
- 2 Fondements et résultats théoriques
  - Minimisation par théorie des moments
  - Somme de fractions rationnelles
- 3 Résultats numériques
  - Problème de Kowalik
  - Problème de Shekel (Shekel's foxholes)
  - Fonctions de Rosenbrock
  - Applications à la vision artificielle
- 4 Conclusion

## Triangulation multivues



## Triangulation multivues

Projection d'un point 3D  $Q$  dans une image :



$$Q \rightarrow \mathbf{q} = \frac{f(\mathbf{K}, Q)}{g(\mathbf{K}, Q)} \text{ où } K \triangleq \mathbf{A}P_f \text{ et } d^\circ f = d^\circ g \geq 2.$$

# Triangulation multivues

Formulation du problème pour  $n$  points observés dans  $p$  vues

$$\min_{\mathbf{Q}} \sum_{k=1}^n \left\| \mathbf{q}^k - \frac{f(\mathbf{K}_k, \mathbf{T}_k \mathbf{Q})}{g(\mathbf{K}_k, \mathbf{T}_k \mathbf{Q})} \right\|_2^2.$$

- Problème de minimisation au sens des moindres carrés dont le nombre de fractions dépend du nombre de vues.
- Degré de fractions rationnelles dépend du type et de l'ordre des distorsions.
- Système résolu globalement au sens de  $\| \cdot \|_{\infty}^1$  mais pas en présence de distorsions.

1. F. Kahl, R. Hartley 2007

## Quelles fonctions étudions-nous ?

### Les fonctions rationnelles multivariées

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i(x)}{q_i(x)}$$

où les numérateurs  $p_i$  et les dénominateurs  $q_i$  sont des polynômes multivariés

### Polynômes multivariés

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_t^n} f_\alpha \underbrace{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}_{x^\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_t^n} f_\alpha x^\alpha$$

avec :

$$\mathbb{N}_t^n \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^n \mid \|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq t \right\} \text{ de taille } |\mathbb{N}_t^n| = \binom{n+t}{n}$$

# Optimisation globale par théorie des moments

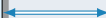
Fonctions continues et  $K$  compact

$$\min_{x \in K} f(x)$$

# Optimisation globale par théorie des moments

Fonctions continues et  $K$  compact

$$\min_{x \in K} f(x)$$



$$\min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K f(x) d\mu$$



# Optimisation globale par théorie des moments

Fonctions continues et  $K$  compact

$$\min_{x \in K} f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K f(x) d\mu$$

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_t^n} f_\alpha \underbrace{\int_K x^\alpha d\mu}_{y_\alpha}$$

Polynômes

$$\inf L_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}) \triangleq \sum_{\alpha} f_{\alpha} y_{\alpha}$$

$$\text{s.l.c } \mathbf{y} \in \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid \exists \mu \in \mathcal{P}(K) : y_{\alpha} = \int_K x^{\alpha} d\mu \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}$$

# Optimisation globale par théorie des moments

Fonctions continues et  $K$  compact

$$\min_{x \in K} f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K f(x) d\mu$$

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_t^n} f_\alpha \underbrace{\int_K x^\alpha d\mu}_{y_\alpha}$$

Polynômes

$$\inf L_y(\mathbf{f}) \triangleq \sum_{\alpha} f_{\alpha} y_{\alpha}$$

$$\text{s.l.c } \mathbf{y} \in \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid \exists \mu \in \mathcal{P}(K) : y_{\alpha} = \int_K x^{\alpha} d\mu \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

# Optimisation globale par théorie des moments

Fonctions continues et  $K$  compact

$$\min_{x \in K} f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K f(x) d\mu \quad \leftarrow \quad f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underbrace{\int_K x^\alpha d\mu}_{y_\alpha}$$

Polynômes

$$\begin{aligned} \inf L_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}) &\triangleq \sum_{\alpha} f_{\alpha} y_{\alpha} \\ \text{s.l.c } \mathbf{y} &\in \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid \exists \mu \in \mathcal{P}(K) : y_{\alpha} = \int_K x^{\alpha} d\mu \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\} \end{aligned}$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

Th. de Putinar

$$\begin{aligned} \inf L_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}) \\ \text{s.l.c } y_0 = 1, M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, M_t(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

# Optimisation globale par théorie des moments

Fonctions continues et  $K$  compact

$$\min_{x \in K} f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K f(x) d\mu \quad \leftarrow \quad f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha \underbrace{\int_K x^\alpha d\mu}_{y_\alpha}$$

Polynômes

$$\begin{aligned} \inf L_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}) &\triangleq \sum_{\alpha} f_{\alpha} y_{\alpha} \\ \text{s.l.c } \mathbf{y} &\in \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid \exists \mu \in \mathcal{P}(K) : y_{\alpha} = \int_K x^{\alpha} d\mu \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\} \end{aligned}$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

Th. de Putinar

$$\begin{aligned} \inf L_{\mathbf{y}}(\mathbf{f}) \\ \text{s.l.c } y_0 = 1, M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, M_t(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

# Optimisation globale par théorie des moments

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

$$\inf L_{\mathbf{y}}(\mathbf{f})$$

$$\text{s.l.c } y_0 = 1, M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, M_t(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

# Optimisation globale par théorie des moments

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

$$\inf L_y(\mathbf{f})$$

$$\text{s.l.c } y_0 = 1, M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, M_t(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Programmation Semi-Définie-Positive

Troncature

$$Q_t \left\{ \begin{array}{l} f_t^{mom} \triangleq \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2t}^n}} L_y(p) \\ \text{s.l.c } y_0 = 1 \\ M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, \\ M_{t-d_{g_j}}(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad \forall j. \end{array} \right.$$

# Optimisation globale par théorie des moments

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

$$\inf L_y(\mathbf{f})$$

$$\text{s.l.c } y_0 = 1, M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, M_t(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Programmation Semi-Définie-Positive

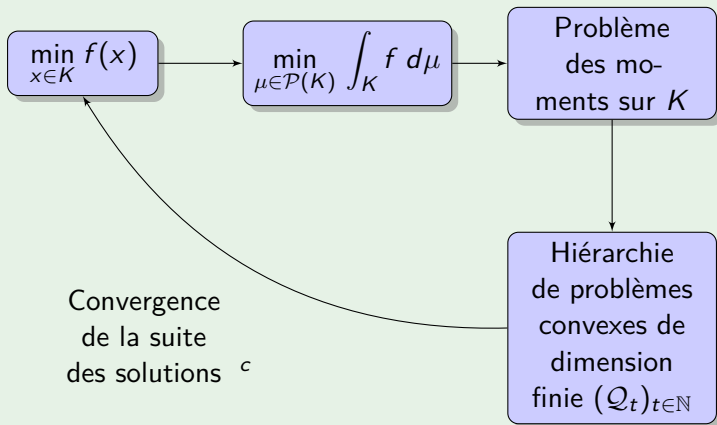
Troncature

Convergence  
de la suite  
 $(f_t^{mom})_{t \in \mathbb{N}}$

$$Q_t \left\{ \begin{array}{l} f_t^{mom} \triangleq \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}} L_y(p) \\ \text{s.l.c } y_0 = 1 \\ M_t(\mathbf{y}) \succeq 0, \\ M_{t-d_{g_j}}(g_j \mathbf{y}) \succeq 0 \quad \forall j. \end{array} \right.$$

Bilan<sup>b</sup>

b. M. Laurent 2010



c. J.-B. Lasserre 2001



## Extension au cas rationnel

But : Résoudre la classe de problèmes suivante

$$\min_{x \in K \subset \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(x)}{q_i(x)}$$

### Difficultés

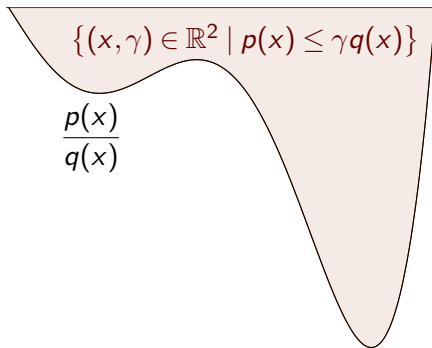
- La réduction au même dénominateur n'offre pas d'alternative : si  $n = 3$ ,  $N = 20$  et  $d^\circ p_i = d^\circ q_i = 2$  alors  $d^\circ \tilde{p} = d^\circ \tilde{q} = 40 \Rightarrow$  hors de portée des méthodes de résolution par relaxation SDP d'une fraction rationnelle<sup>d</sup>
- Pas de solution générique traitant le problème sans faire d'hypothèses sur les numérateurs et dénominateurs<sup>e f</sup>

d. D. Jibetean, E. de Klerk 2003

e. F. Kahl, R. Hartley 2008

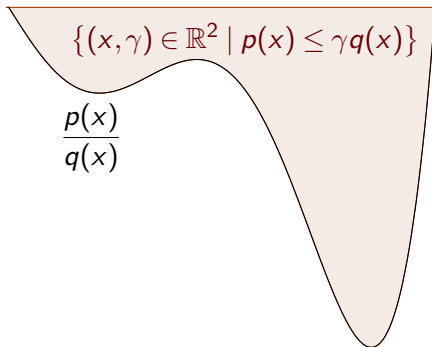
f. F. Kahl et al 2008

# Epigraphes



$$\min_{x \in K} \left[ \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \dots + \frac{p_N(x)}{q_N(x)} \right]$$

# Epigraphes



$$\begin{array}{l}
 \min_{x \in K} \quad \boxed{\frac{p_1(x)}{q_1(x)}} + \boxed{\frac{p_2(x)}{q_2(x)}} + \dots + \boxed{\frac{p_N(x)}{q_N(x)}} \\
 \min_{x, \gamma} \quad \boxed{\gamma_1} + \boxed{\gamma_2} + \dots + \boxed{\gamma_N} \\
 \text{s.l.c} \quad p_i(x) \leq \gamma_i q_i(x), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.
 \end{array}$$

# Epigraphes

## Problème

Ajout de  $N$  variables  $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  d'optimisation  $\Rightarrow \mu \in \mathcal{P}(K \times \mathbb{R}^N)$ .  
Les matrices considérées dans les relaxations sont de taille  $|\mathbb{N}_t^{n+N}|$ .

## Solution

Prendre en compte le **faible couplage** ou la **parcimonie** des variables de relèvement  $\gamma$ .

## Définition

On dit qu'un polynôme  $p$  admet un **schéma de parcimonie** de ces variables si les monômes de  $p$  ne font pas intervenir simultanément toutes les variables.

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6.$$

# Epigraphes avec parcimonie

## Utilisation de la parcimonie

Sous certaines hypothèses, on peut découper  $\mu \in \mathcal{P}(K \times \mathbb{R}^N)$  à l'aide d'une famille de sous-mesures  $\mu_i \in \mathcal{P}(K \times \mathbb{R})$  portant chacune sur  $\{x, \gamma_i\} \Rightarrow$  matrices de taille  $|\mathbb{N}_t^{n+1}|$ .

## Bilan

$$\min_{x \in K} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(x)}{q_i(x)}$$

$$\begin{aligned} \min_{\mu_i \in \mathcal{P}(K \times \mathbb{R})} \quad & \sum_{i=1}^N \int_K \gamma_i d\mu_i \\ \text{s.l.c} \quad & p_i(x) \leq \gamma_i q_i(x) \quad \forall i = 1, \dots, N \\ & \int_K x^\alpha d\mu_k = \int_K x^\alpha d\mu_l \quad \forall k \neq l \\ & \quad \quad \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{aligned}$$

Polynomial  $\Rightarrow$  Convergence

# Programmation rationnelle

## Principe

Introduire une mesure pour chaque fraction rationnelle de manière à supprimer les dénominateurs de la fonction coût

Par exemple, dans le cas  $m = 1$  on pose  $d\nu = \frac{d\mu}{q}$ , d'où :

$$\min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K \frac{p}{q} d\mu \Leftrightarrow \min_{\nu \in \mathcal{M}_+(K)} \int_K p d\nu \quad \text{s.l.c} \quad \int_K q d\nu = 1.$$

Dans le cas général on obtient :

$$\begin{array}{c} \min_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \int_K \frac{p_1(x)}{q_1(x)} d\mu \\ \updownarrow \\ \min_{\nu_1 \in \mathcal{M}_+(K)} \int_K p_1(x) d\nu_1 \end{array} + \begin{array}{c} \int_K \frac{p_2(x)}{q_2(x)} d\mu \\ \updownarrow \\ \int_K p_2(x) d\nu_2 \end{array} + \dots$$

# Programmation rationnelle

## De nouvelles contraintes apparaissent

Toutes les mesures  $q_i d\nu_i$  doivent être des mesures de probabilité égales entre elles.

## Bilan

$$\min_{x \in K} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(x)}{q_i(x)}$$

$$\begin{aligned} \min_{\nu_i \in \mathcal{M}_+(K)} \sum_{i=1}^N \int_K p_i d\nu_i \\ \text{s.l.c } \int_K q_1 d\nu_1 = 1 \\ \int_K x^\alpha q_k d\nu_k = \int_K x^\alpha q_1 d\nu_1, \quad \forall i \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{aligned}$$

Preuve de convergence

# Problème de Kowalik

## Formulation

$$\min_{x \in [0, \frac{42}{100}]^4} \sum_{k=1}^{11} \left( a_k - \frac{x_1(1 + x_2 b_k)}{(1 + x_3 b_k + x_4 b_k^2)} \right)^2$$

avec :

$$a = (0.195 \ 0.194 \ 0.173 \ 0.160 \ 0.084 \ 0.062 \ 0.045 \ 0.034 \\ 0.032 \ 0.023 \ 0.024)^\top$$

$$b = \left( 1/4 \ 1/2 \ 1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \ 14 \ 16 \right)^\top.$$



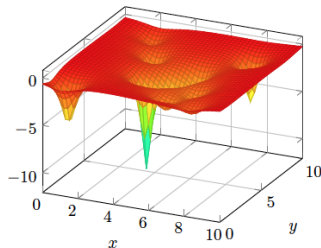
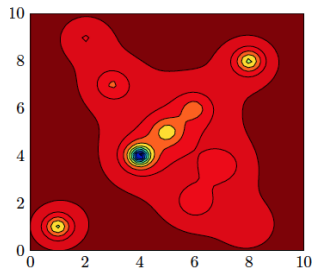
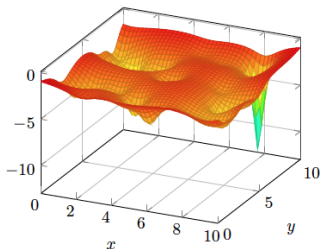
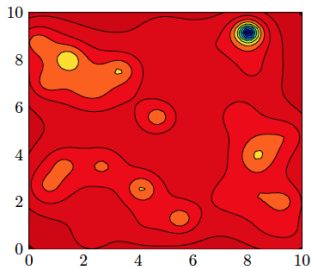
## Problème de Kowalik

### Résultats obtenus à la 3<sup>ème</sup> relaxation

Méthode	nb moments	nb substitutions
Prog. Rat.	2310	0
Epigraphe	5082	126

Méthode	$x_1^*$	$x_2^*$	$x_3^*$	$x_4^*$	$f^*$	tps(s)
Théorique	0.192	0.190	0.123	0.135	$3.10 \times 10^{-4}$	N.A.
Prog. Rat.	0.192	0.190	0.123	0.135	$3.10 \times 10^{-4}$	9.37
Epigraphe	0.185	0.204	0.199	0.089	$1.5 \times 10^{-3}$	34.6

# Problème de Shekel (Shekel's foxholes)



# Problème de Shekel (Shekel's foxholes)

## Formulation

$$\min_{x \in [0, 10]^n} f(x) := - \sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i + \sum_{j=1}^n (x_j - a_{ij})^2}.$$

Pour deux jeux de valeurs des  $a_{ij}$ ,  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n$ , les minima globaux sont connus<sup>g</sup>.

g. M. Ali 2005

## Problème de Shekel

### Premier jeu de valeurs

30 fractions, 5 variables.

Méthode	certificat d'optimalité	tps(s)
Prog. Rat.	Oui	84 (3 <sup>ème</sup> relaxation)
BARON	Oui	2500

### Deuxième jeu de valeurs

30 fractions, 10 variables.

Méthode	certificat d'optimalité	tps(s)
Prog. Rat.	Oui	284 (2 <sup>ème</sup> relaxation)
BARON	Non	3600

# Fonctions de Rosenbrock

## Formulation

$$f^* = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 + 1}$$

Le maximum  $f^* = n - 1$  du problème est atteint en  $x_i^* = 1$ ,  
 $i = 1, \dots, n$

## Pour $n = 1000$

- La méthode proposée certifie le minimum en 500s
- BARON ne trouve pas la bonne solution ( $x_1 = -0.995$  et  $x_i = 1, \forall i = 2..1000$ )

# Fonctions de Rosenbrock

## Formulation

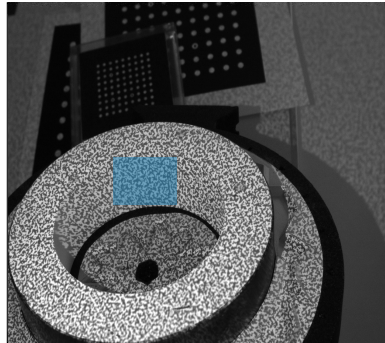
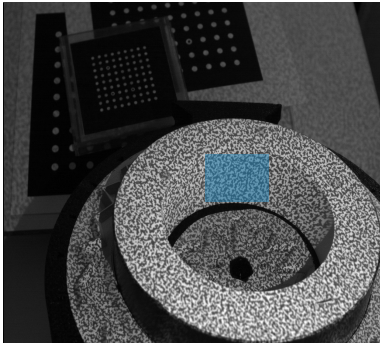
$$f^* = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 + 1}$$

## Pour $n = 17$

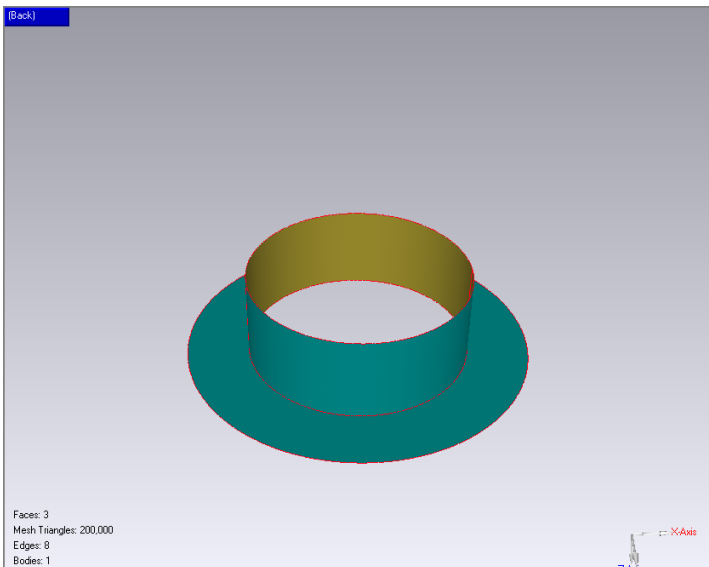
- La méthode proposée certifie le minimum  $f_{GMP}^* = 7.383$  en 26 secondes
- BARON trouve un minimum local  $f_{BAR}^* = 7.342$  en 5 secondes.

## Cas réel sans distorsions : cylindre étalon

Les erreurs d'usinage du cylindre sont supposées être très faibles  $\Rightarrow$  le recalage à la forme CAO permet d'évaluer les qualités de reconstruction 3D.

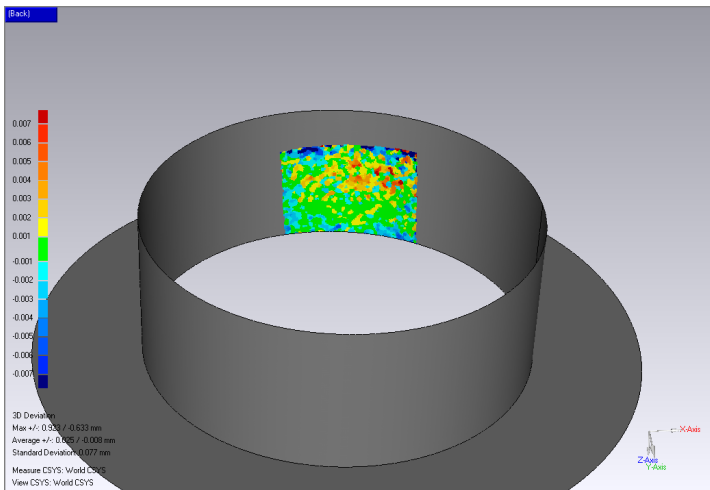


# Cas réel : CAO du cylindre étalon

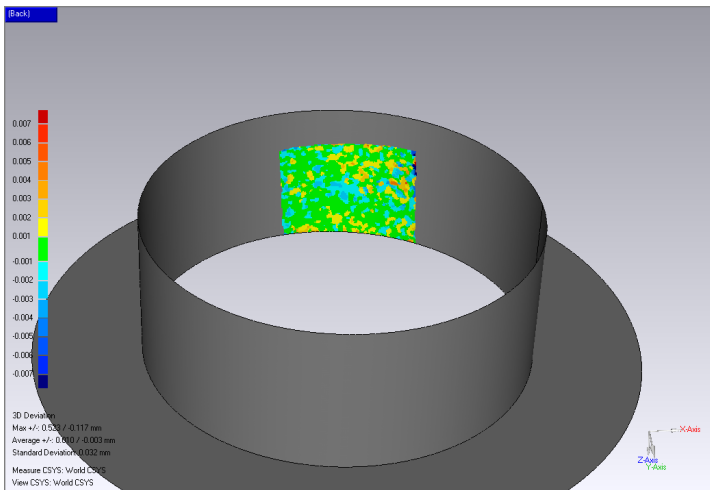




# Ecart à la forme nominale du nuage 3D triangulé avec l'approche locale



# Ecart à la forme nominale du nuage 3D triangulé avec l'approche globale $L_2$



## Comparatif numérique :

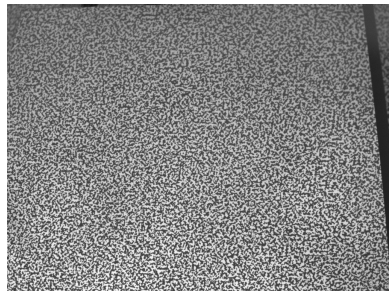
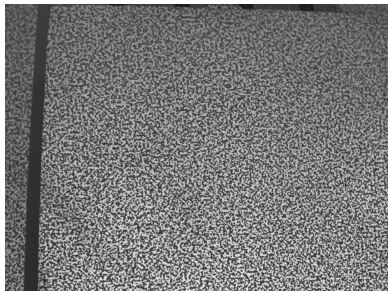
Distance moyenne, écart type, et distance maximale obtenues en recalant 9000 points 3D triangulés par les trois méthodes testées sur le cylindre étalon.

Méthode	Dist. moy.(mm)	Ecart type(mm)	Dist. max.(mm)
Locale	+0.025/-0.008	0.077	+0.923/-0.633
Glob. $L_\infty$ <sup>8</sup>	+0.009/-0.005	0.033	+0.528/-0.412
Glob. $L_2$	+0.010/-0.003	0.032	+0.523/-0.117

8. F .Kahl, R. Hartley 2007

## Cas réel avec distorsions : le plan étalon

Prise en compte des distorsions  $\Rightarrow$  problème de minimisation rationnelle avec des polynômes de  $d^{\circ}6$ .



Ce plan a une longueur de 30cm et une largeur de 20cm.

## Comparatif numérique :

Distance moyenne, écart type, et distance maximale obtenues en calculant le plan moyen passant par 500 points triangulés.

Méthode	Dist. moy.(mm)	Ecart type(mm)	Dist. max.(mm)
Locale	+0.008/-0.007	0.011	+0.040/-0.078
Globale	+0.005/-0.006	0.007	+0.019/-0.017

## Bilan

### Epigraphes

- Pénalisé lorsque le degré des numérateurs est élevé
- Très sensible aux bornes des variables de relèvement

### Programmation Rationnelle

- Moins sensible à l'augmentation du nombre de variables
- Fonctionne même en présence de singularités

### Prise en compte de la parcimonie des variables d'optimisation

Il est possible de considérer, pour les deux méthodes, un grand nombre de variables (jusqu'à 1000).

[Bugarin F., Henrion D., Lasserre J.-B., *Minimizing the sum of many rational functions*, Mathematical Programming Computation, 8(1) : 83-111, 2016]

## Perspectives :

Application de la méthode à d'autres problèmes de vision artificielle :

- triangulation avec des modèles de distorsion plus complexes
- le problème de triangulation de ligne :

$$\min_{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^6} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(\mathbf{L}^\top \tilde{\mathbf{P}}_i^1\right)^2 + \left(\mathbf{L}^\top \tilde{\mathbf{P}}_i^2\right)^2} \sum_{k=1}^{l(i)} \mathbf{q}_{i,k}^\top \tilde{\mathbf{P}}_i \mathbf{L}$$

s.l.c  $\|\mathbf{L}\|_F^2 = 1$

$$\mathbf{L}^\top \mathbf{K} \mathbf{L} = 0 \text{ avec } \mathbf{K} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

## Perspectives :

Application de la méthode à d'autres problèmes de vision artificielle :

- mettre en œuvre la méthode avec prise en compte de la parcimonie dans le cadre général de l'ajustement de faisceaux :
  - triangulation "standard" :

$$\min_{Q_i} \sum_{k=1}^n \|q^k - f(\mathbf{K}_k, \mathbf{T}_k Q)\|_2^2.$$

- ajustement de faisceaux :

$$\min_{\mathbf{K}_k, \mathbf{T}_k, Q_i} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \|q_i^k - f(\mathbf{K}_k, \mathbf{T}_k Q_i)\|_2^2.$$



**Merci de votre attention**