Gains et pertes sont fondamentalement différents pour la minimisation du regret : le cas sparse

Joon Kwon
UPMC – Paris 6
Paris, France

Vianney Perchet
ENSAE
Paris, France

Journées SMAI–MODE 2016, Toulouse

vendredi 25 mars 2016

Cadre

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \ldots, T$

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \ldots, T$
  - Le joueur choisit $x_t \in \Delta_d$ et tire $i_t \sim x_t$.

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \ldots, T$
  - Le joueur choisit $x_t \in \Delta_d$ et tire $i_t \sim x_t$.
  - La nature rélève $g_t \in [0, 1]^d$.

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \ldots, T$
  - Le joueur choisit $x_t \in \Delta_d$ et tire $i_t \sim x_t$.
  - La nature rélève $g_t \in [0, 1]^d$.
  - Le joueur obtient un gain de $g_t^{(i_t)} \in [0, 1]$.

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \ldots, T$
  - Le joueur choisit $x_t \in \Delta_d$ et tire $i_t \sim x_t$.
  - La nature rélève $g_t \in [0, 1]^d$.
  - Le joueur obtient un gain de $g_t^{(i_t)} \in [0, 1]$.
- Une stratégie (ou algorithme) $\sigma = (\sigma_t)_{1 \leqslant t \leqslant T}$

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \ldots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \ldots, T$
  - Le joueur choisit $x_t \in \Delta_d$ et tire $i_t \sim x_t$.
  - La nature rélève $g_t \in [0,1]^d$.
  - Le joueur obtient un gain de $g_t^{(i_t)} \in [0,1]$.
- Une stratégie (ou algorithme) $\sigma = (\sigma_t)_{1 \leqslant t \leqslant T}$

$$x_t = \sigma_t(x_1, i_1, g_1, \ldots, x_{t-1}, i_{t-1}, g_{t-1}).$$

Cadre

- Ensemble d'action pour le joueur : $[d] := \{1, \dots, d\}$.
- Ensemble d'actions mixtes Δ_d.
- À l'étape $t = 1, \dots, T$
  - Le joueur choisit $x_t \in \Delta_d$ et tire $i_t \sim x_t$.
  - La nature rélève $g_t \in [0,1]^d$.
  - Le joueur obtient un gain de $g_t^{(i_t)} \in [0,1]$.
- Une stratégie (ou algorithme) $\sigma = (\sigma_t)_{1 \leqslant t \leqslant T}$

$$x_t = \sigma_t(x_1, i_1, g_1, \dots, x_{t-1}, i_{t-1}, g_{t-1}).$$

$$\text{Maximiser :} \quad \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}$$

Le Regret

Le Regret

$$g_t^{(i)}$$

Le Regret

$$\sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)}$$

Le Regret

$$\max_{i\in[d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)}$$

Le Regret

$$\max_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}$$

Le Regret

$$R_T := \mathbb{E}\left[\max_{i\in[d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}\right]$$

Le Regret

$$R_T\left\{\sigma, (g_t)_t\right\} = R_T := \mathbb{E}\left[\max_{i\in[d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}\right]$$

Le Regret

$$R_T\left\{\sigma, (g_t)_t\right\} = R_T := \mathbb{E}\left[\max_{i\in[d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}\right]$$

- **Introduit par** : Hannan (1957)
- **Surveys** : Cesa-Bianchi–Lugosi (2006), Rakhlin–Tewari (2008), Shalev-Shwartz (2011), Hazan (2012), Bubeck–Cesa-Bianchi (2012),...

Le Regret

$$R_T\left\{\sigma,(g_t)_t\right\} = R_T := \mathbb{E}\left[\max_{i\in[d]}\sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}\right]$$

Une stratégie σ *garantit* $B(d,T)$ si :

- **Introduit par** : Hannan (1957)
- **Surveys** : Cesa-Bianchi–Lugosi (2006), Rakhlin–Tewari (2008), Shalev-Shwartz (2011), Hazan (2012), Bubeck–Cesa-Bianchi (2012),...

Le Regret

$$R_T\left\{\sigma,(g_t)_t\right\} = R_T := \mathbb{E}\left[\max_{i\in[d]}\sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}\right]$$

Une stratégie σ *garantit* $B(d,T)$ si :

$$R_T\left\{\sigma,(g_t)_t\right\} \leqslant B(d,T).$$

- **Introduit par** : Hannan (1957)
- **Surveys** : Cesa-Bianchi–Lugosi (2006), Rakhlin–Tewari (2008), Shalev-Shwartz (2011), Hazan (2012), Bubeck–Cesa-Bianchi (2012),...

Le Regret

$$R_T\left\{\sigma,(g_t)_t\right\} = R_T := \mathbb{E}\left[\max_{i\in[d]}\sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i_t)}\right]$$

Une stratégie σ *garantit* $B(d,T)$ si :

$$\forall (g_t)_t, \quad R_T\left\{\sigma,(g_t)_t\right\} \leqslant B(d,T).$$

- **Introduit par** : Hannan (1957)
- **Surveys** : Cesa-Bianchi–Lugosi (2006), Rakhlin–Tewari (2008), Shalev-Shwartz (2011), Hazan (2012), Bubeck–Cesa-Bianchi (2012),...

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

$$R_T\left\{\sigma, (g_t)_t\right\}$$

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

$$\max_{(g_t)_t} R_T\left\{\sigma, (g_t)_t\right\}$$

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

$$\min_{\sigma} \max_{(g_t)_t} R_T \{\sigma, (g_t)_t\}$$

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

$$\min_{\sigma} \max_{(g_t)_t} R_T \left\{\sigma, (g_t)_t\right\} \quad \text{est de l'ordre de} \quad \sqrt{T \log d}$$

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

$$\min_{\sigma} \max_{(g_t)_t} R_T \{\sigma, (g_t)_t\} \quad \text{est de l'ordre de} \quad \sqrt{T \log d}$$

- **Borne supérieure** : Cesa-Bianchi (1997)

Le Regret minimax

- T : nombre d'étapes
- d : nombre d'actions

$$\min_{\sigma} \max_{(g_t)_t} R_T \left\{\sigma, (g_t)_t\right\} \quad \text{est de l'ordre de} \quad \sqrt{T \log d}$$

- **Borne supérieure** : Cesa-Bianchi (1997)
- **Borne inférieure** : Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire, Warmuth (1997)

Stratégies Mirror Descent

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, $\operatorname{dom} h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t =$$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \Bigg($$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \Bigg(\eta$$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Theorem (Shalev-Shwartz (2007), Bubeck (2011), etc.)

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Theorem (Shalev-Shwartz (2007), Bubeck (2011), etc.)

- *h est K-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|$*

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Theorem (Shalev-Shwartz (2007), Bubeck (2011), etc.)

- *h est K-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|$*
- *$\|g\|_* \leqslant M$ pour tout vecteur de gain possible g*

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Theorem (Shalev-Shwartz (2007), Bubeck (2011), etc.)

- *h est K-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|$*
- *$\|g\|_* \leqslant M$ pour tout vecteur de gain possible g*

$$R_T \leqslant \frac{\delta_h}{\eta} + \eta \frac{TM^2}{K}$$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Theorem (Shalev-Shwartz (2007), Bubeck (2011), etc.)

- *h est K-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|$*
- *$\|g\|_* \leqslant M$ pour tout vecteur de gain possible g*

$$R_T \leqslant \frac{\delta_h}{\eta} + \eta \frac{TM^2}{K} \qquad \underset{\eta = \sqrt{\delta_h/(TM^2)}}{\rightsquigarrow}$$

Stratégies Mirror Descent

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, sci, dom $h = \Delta_d$
- $\delta_h := \max_{\Delta_d} h - \min_{\Delta_d} h$.
- $\eta > 0$ un paramètre.

$$x_t = \nabla h^* \left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s \right)$$

Theorem (Shalev-Shwartz (2007), Bubeck (2011), etc.)

- *h est K-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|$*
- *$\|g\|_* \leqslant M$ pour tout vecteur de gain possible g*

$$R_T \leqslant \frac{\delta_h}{\eta} + \eta \frac{TM^2}{K} \quad \underset{\eta=\sqrt{\delta_h/(TM^2)}}{\rightsquigarrow} \quad \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h / K} \cdot M$$

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h / K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h / K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels

$$x_t^{(i)} = \frac{\exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^{d} \exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(j)}\right)}$$

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^d x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels

$$x_t^{(i)} = \frac{\exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^d \exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(j)}\right)}$$

- $\delta_h = \log d$.

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels

$$x_t^{(i)} = \frac{\exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^{d} \exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(j)}\right)}$$

- $\delta_h = \log d$.
- h est 1-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|_1$.

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^d x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels

$$x_t^{(i)} = \frac{\exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^d \exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(j)}\right)}$$

- $\delta_h = \log d$.
- h est 1-fortement convexe par rapport à $\| \cdot \|_1$.
- $g \in [0,1]^d \quad \Longrightarrow \quad \|g\|_\infty \leqslant 1$.

L'Algorithme à poids exponentiels garantit $\sqrt{T \log d}$

$$R_T \leqslant \sqrt{T \delta_h / K} \cdot M$$

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^d x^{(i)} \log x^{(i)} & \text{si } x \in \Delta_d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'Algorithme à poids exponentiels

$$x_t^{(i)} = \frac{\exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(i)}\right)}{\sum_{j=1}^d \exp\left(\eta \sum_{s=1}^{t-1} g_s^{(j)}\right)}$$

- $\delta_h = \log d$.
- h est 1-fortement convexe par rapport à $\|\cdot\|_1$.
- $g \in [0,1]^d \quad \Longrightarrow \quad \|g\|_\infty \leqslant 1$.

$$R_T \leqslant \sqrt{T \log d}.$$

Gains et pertes sont équivalents

Gains et pertes sont équivalents

- La nature choisit des vecteurs de *pertes* $\ell_t \in [0,1]^d$

Gains et pertes sont équivalents

- La nature choisit des vecteurs de *pertes* $\ell_t \in [0,1]^d$

$$\sum_{t=1}^{T} \langle \ell_t | x_t \rangle - \min_{i\in[d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

Gains et pertes sont équivalents

- La nature choisit des vecteurs de *pertes* $\ell_t \in [0,1]^d$

$$\sum_{t=1}^{T} \langle \ell_t | x_t \rangle - \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

- $g_t^{(i)} := 1 - \ell_t^{(i)}$

Gains et pertes sont équivalents

- La nature choisit des vecteurs de *pertes* $\ell_t \in [0,1]^d$

$$\sum_{t=1}^{T} \langle \ell_t | x_t \rangle - \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

- $g_t^{(i)} := 1 - \ell_t^{(i)}$
- $\ell_t \in [0,1]^d \implies g_t \in [0,1]^d$.

Gains et pertes sont équivalents

- La nature choisit des vecteurs de *pertes* $\ell_t \in [0,1]^d$

$$\sum_{t=1}^{T} \langle \ell_t | x_t \rangle - \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

- $g_t^{(i)} := 1 - \ell_t^{(i)}$
- $\ell_t \in [0,1]^d \implies g_t \in [0,1]^d$.

$$\max_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} \langle g_t | x_t \rangle$$

Gains et pertes sont équivalents

- La nature choisit des vecteurs de *pertes* $\ell_t \in [0,1]^d$

$$\sum_{t=1}^{T} \langle \ell_t | x_t \rangle - \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

- $g_t^{(i)} := 1 - \ell_t^{(i)}$
- $\ell_t \in [0,1]^d \implies g_t \in [0,1]^d$.

$$\max_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} g_t^{(i)} - \sum_{t=1}^{T} \langle g_t | x_t \rangle = \sum_{t=1}^{T} \langle \ell_t | x_t \rangle - \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Exemple

$d = 3$ et $s = 1$.

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Exemple

$d = 3$ et $s = 1$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Exemple

$d = 3$ et $s = 1$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Exemple

$d = 3$ et $s = 1$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Exemple

$d = 3$ et $s = 1$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une hypothèse de parcimonie

Soit $s \geqslant 1$ un entier.

Hypothèse

Les vecteurs de gains (resp. de pertes) sont s-sparse, i.e. ont au plus s composantes non nulles.

Exemple

$d = 3$ et $s = 1$.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{n'est pas 1-sparse}$$

Regret minimax pour les gains s-sparse

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\binom{d \text{ actions}}{s\text{-sparse}}$$

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\binom{d \text{ actions}}{s\text{-sparse}}$$

regret minimax

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ s\text{-sparse} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix}$$

regret minimax

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ s\text{-sparse} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix}$$

regret minimax $\qquad \sqrt{T \log d}$

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\begin{pmatrix} s \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ s\text{-sparse} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix}$$

regret minimax $\qquad \sqrt{T \log d}$

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\begin{pmatrix} s \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ s\text{-sparse} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{T \log s}$ regret minimax $\sqrt{T \log d}$

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\begin{pmatrix} s \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ s\text{-sparse} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{T \log s} \quad \leqslant \quad \text{regret minimax} \quad \leqslant \quad \sqrt{T \log d}$$

Regret minimax pour les gains s-sparse

$$\begin{pmatrix} s \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ s\text{-sparse} \end{pmatrix} \underset{\text{plus facile}}{\leqslant} \begin{pmatrix} d \text{ actions} \\ \text{sans hyp.} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{T \log s} \quad \leqslant \quad \text{regret minimax} \quad \leqslant \quad \sqrt{T \log d}$$

$$\sqrt{T \log s}$$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \implies \quad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \implies R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$
- h_p est $(p-1)$-fortement cvx pour $\|\cdot\|_p$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \implies R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$
- h_p est $(p-1)$-fortement cvx pour $\|\cdot\|_p$
- $\|g\|_q = \left(\sum_{i=1}^{d} \left|g^{(i)}\right|^q\right)^{1/q}$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \implies \quad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$
- h_p est $(p-1)$-fortement cvx pour $\|\cdot\|_p$
- $\|g\|_q = \left(\sum_{i=1}^d \left|g^{(i)}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant s^{1/q}$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \implies \quad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$
- h_p est $(p-1)$-fortement cvx pour $\|\cdot\|_p$
- $\|g\|_q = \left(\sum_{i=1}^{d} \left|g^{(i)}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant s^{1/q}$

$$R_T \leqslant \sqrt{\frac{T}{p-1} s^{1/q}}.$$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \implies \quad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$
- h_p est $(p-1)$-fortement cvx pour $\|\cdot\|_p$
- $\|g\|_q = \left(\sum_{i=1}^{d} \left|g^{(i)}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant s^{1/q}$

$$R_T \leqslant \sqrt{\frac{T}{p-1} s^{1/q}}.$$

$$p = 1 + \frac{1}{2\log s - 1}$$

Borne supérieure pour les gains s-sparse

$$\begin{cases} h \text{ est } K\text{-fortement convexe pour } \|\cdot\| \\ \forall g, \quad \|g\|_* \leqslant M \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad R_T \leqslant \sqrt{T\delta_h/K} \cdot M$$

- $h_p(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2 \quad (\text{if } x \in \Delta_d)$
- $\delta_h \leqslant 1$
- h_p est $(p-1)$-fortement cvx pour $\|\cdot\|_p$
- $\|g\|_q = \left(\sum_{i=1}^{d} \left|g^{(i)}\right|^q\right)^{1/q} \leqslant s^{1/q}$

$$R_T \leqslant \sqrt{\frac{T}{p-1} s^{1/q}}.$$

$$p = 1 + \frac{1}{2\log s - 1}$$

$$R_T \leqslant \sqrt{T \log s}$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Regret minimax pour les pertes s-sparse

L'algorithme à poids exponentiels

Regret minimax pour les pertes s-sparse

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i\in[d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \ell_t^{(i)}$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

$$sT \geqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \ell_t^{(i)}$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ *garantit :*

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

$$sT \geqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \ell_t^{(i)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

$$sT \geqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \ell_t^{(i)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)} \geqslant d \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

$$sT \geqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \ell_t^{(i)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)} \geqslant d \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \frac{sT}{d}$$

Regret minimax pour les pertes s-sparse

Theorem (Littlestone–Warmuth (1994))

L'algorithme à poids exponentiels joué contre des pertes $\ell_t \in [0,1]^d$ garantit :

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}.$$

$$sT \geqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \ell_t^{(i)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)} \geqslant d \cdot \min_{i \in [d]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{(i)}$$

$$R_T \quad \lesssim \quad \frac{\log d}{\eta} + \eta \frac{sT}{d} \quad = \quad \sqrt{Ts\frac{\log d}{d}}$$

Le cadre bandit

Le cadre bandit

À l'étape $t = 1, \ldots, T$

- Le joueur choisit $i_t \in [d]$.
- La nature révèle seulement $g_t^{(i_t)}$.
- Le joueur obtient $g_t^{(i_t)}$.

Le cadre bandit

À l'étape $t = 1, \dots, T$

- Le joueur choisit $i_t \in [d]$.
- La nature révèle seulement $g_t^{(i_t)}$.
- Le joueur obtient $g_t^{(i_t)}$.

Theorem

Le regret minimax est de l'ordre de $\sqrt{Td}$

- **Borne supérieure** : Audibert et Bubeck (2009)
- **Borne inférieure** : Auer, Cesa-Bianchi, Freund et Schapire (2002)

Bornes supérieures et inférieures

	Gains	Pertes
Borne sup.		
Borne inf.		

Bornes supérieures et inférieures

	Gains	Pertes
Borne sup.		
Borne inf.		$\sqrt{Ts}$

Bornes supérieures et inférieures

	Gains	Pertes
Borne sup.		$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$
Borne inf.		$\sqrt{Ts}$

Bornes supérieures et inférieures

	Gains	Pertes
Borne sup.		$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$
Borne inf.	$\sqrt{Ts}$	$\sqrt{Ts}$

Bornes supérieures et inférieures

sans hypothèse de parcimonie : $\sqrt{Td}$

	Gains	Pertes
Borne sup.		$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$
Borne inf.	$\sqrt{Ts}$	$\sqrt{Ts}$

Bornes supérieures et inférieures

sans hypothèse de parcimonie : $\sqrt{Td}$

	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{Td}$	$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$
Borne inf.	$\sqrt{Ts}$	$\sqrt{Ts}$

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse.

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

OUI

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

OUI

Theorem (K. & Perchet (2015))

Il existe une stratégie qui garantit $\sqrt{T \log s^*}$ *où* $s^* = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \|g_t\|_0$.

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

OUI

Theorem (K. & Perchet (2015))

Il existe une stratégie qui garantit $\sqrt{T \log s^*}$ *où* $s^* = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \|g_t\|_0$.

- On ne sait rien quant à la parcimonie des vecteurs.

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

OUI

Theorem (K. & Perchet (2015))

Il existe une stratégie qui garantit $\sqrt{T \log s^*}$ *où* $s^* = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \|g_t\|_0$.

- On ne sait rien quant à la parcimonie des vecteurs.
- On joue cette stratégie.

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

OUI

Theorem (K. & Perchet (2015))

Il existe une stratégie qui garantit $\sqrt{T \log s^*}$ *où* $s^* = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \|g_t\|_0$.

- On ne sait rien quant à la parcimonie des vecteurs.
- On joue cette stratégie.
- Si les vecteurs se révèlent être s-sparse, alors on aura :

$$R_T \lesssim \sqrt{T \log s}.$$

- Si le joueur sait que les vecteurs sont s-sparse, il peut choisir la stratégie adéquate pour se garantir $\sqrt{T \log s}$.
- Si s est inconnu peut-il malgré tout tirer profit d'une éventuelle parcimonie ?
- Le joueur sait que les vecteurs sont 1000-sparse. Mais s'ils se révèlent être 10-sparse, ... ?

OUI

Theorem (K. & Perchet (2015))

Il existe une stratégie qui garantit $\sqrt{T \log s^*}$ *où* $s^* = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \|g_t\|_0$.

- On ne sait rien quant à la parcimonie des vecteurs.
- On joue cette stratégie.
- Si les vecteurs se révèlent être s-sparse, alors on aura :

$$R_T \lesssim \sqrt{T \log s}.$$

résultat analogue pour les pertes

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.				
Borne inf.				

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{T \log s}$	$\sqrt{Ts\frac{\log d}{d}}$		
Borne inf.				

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{T \log s}$	$\sqrt{Ts\frac{\log d}{d}}$		
Borne inf.				

peuvent être garanties
sans connaître s

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{T \log s}$	$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$	$\sqrt{Td}$	
Borne inf.			$\sqrt{Ts}$	

peuvent être garanties
sans connaître s

Recapitulatif

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Information complète</td><td colspan="2">Bandit</td></tr>
<tr><td></td><td>Gains</td><td>Pertes</td><td>Gains</td><td>Pertes</td></tr>
<tr><td>Borne sup.</td><td rowspan="2">$\sqrt{T \log s}$</td><td rowspan="2">$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$</td><td>$\sqrt{Td}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Borne inf.</td><td>$\sqrt{Ts}$</td><td></td></tr>
</table>

peuvent être garanties
sans connaître s

grande disparité

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{T \log s}$	$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$	$\sqrt{Td}$	
Borne inf.			$\sqrt{Ts}$	

peuvent être garanties
sans connaître s

grande disparité
problème ouvert

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{T \log s}$	$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$	$\sqrt{Td}$	$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$
Borne inf.			$\sqrt{Ts}$	$\sqrt{Ts}$

peuvent être garanties
sans connaître s

grande disparité
problème ouvert

Recapitulatif

	Information complète		Bandit	
	Gains	Pertes	Gains	Pertes
Borne sup.	$\sqrt{T \log s}$	$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$	$\sqrt{Td}$	$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$
Borne inf.			$\sqrt{Ts}$	$\sqrt{Ts}$

peuvent être garanties sans connaître s

grande disparité problème ouvert

petite disparité

Recapitulatif

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Information complète</td><td colspan="2">Bandit</td></tr>
<tr><td>Gains</td><td>Pertes</td><td>Gains</td><td>Pertes</td></tr>
<tr><td>Borne sup.</td><td rowspan="2">$\sqrt{T \log s}$</td><td rowspan="2">$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$</td><td>$\sqrt{Td}$</td><td>$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$</td></tr>
<tr><td>Borne inf.</td><td>$\sqrt{Ts}$</td><td>$\sqrt{Ts}$</td></tr>
</table>

peuvent être garanties sans connaître s

grande disparité problème ouvert

petite disparité $\nearrow$ en d ?

Recapitulatif

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Information complète</td><td colspan="2">Bandit</td></tr>
<tr><td></td><td>Gains</td><td>Pertes</td><td>Gains</td><td>Pertes</td></tr>
<tr><td>Borne sup.</td><td rowspan="2">$\sqrt{T \log s}$</td><td rowspan="2">$\sqrt{Ts \frac{\log d}{d}}$</td><td>$\sqrt{Td}$</td><td>$\sqrt{Ts \log \frac{d}{s}}$</td></tr>
<tr><td>Borne inf.</td><td>$\sqrt{Ts}$</td><td>$\sqrt{Ts}$</td></tr>
</table>

peuvent être garanties
sans connaître s

grande disparité
problème ouvert

petite disparité
$\nearrow$ en d ?

et si on ne
connaît pas s… ?