Approximation en gradient du problème de Monge

Jean Louet

CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine

Journées SMAI-MODE
23 mars 2016

(En collaboration avec L. De Pascale et F. Santambrogio)

1. Le problème de Monge
   - Problème de Monge et formulation duale
   - Rayons de transport et transports optimaux
   - Le transport optimal monotone
2. Approximation en gradient
3. Approximation d'ordre $\varepsilon|\log \varepsilon|$

Problème de Monge et formulation duale

Problème original de Monge (1781) :

$$\inf \left\{ \int |T(x) - x| \, d\mu(x) \ : \ T_{\#}\mu = \nu \right\} \qquad (M)$$

- Contrainte $T_{\#}\mu = \nu$: non-linéaire, compliquée, "instable"

Problème de Monge et formulation duale

Problème original de Monge (1781) :

$$\inf\left\{\int |T(x)-x|\,\mathrm{d}\mu(x)\ :\ T_{\#}\mu=\nu\right\} \qquad (M)$$

- Contrainte $T_{\#}\mu=\nu$: non-linéaire, compliquée, “instable”
- On passe à la formulation relaxée (Kantorovitch, 1940) :

$$\inf\left\{\int |y-x|\,\mathrm{d}\gamma(x,y)\ :\ \begin{array}{l}(\pi_1)_{\#}\gamma=\mu\\(\pi_2)_{\#}\gamma=\nu\end{array}\right\} \qquad (K)$$

Problème de Monge et formulation duale

Problème original de Monge (1781) :

$$\inf\left\{\int |T(x)-x|\,\mathrm{d}\mu(x)\ :\ T_{\#}\mu=\nu\right\} \qquad (M)$$

- Contrainte $T_{\#}\mu=\nu$: non-linéaire, compliquée, "instable"
- On passe à la formulation relaxée (Kantorovitch, 1940) :

$$\inf\left\{\int |y-x|\,\mathrm{d}\gamma(x,y)\ :\ \begin{array}{l}(\pi_1)_{\#}\gamma=\mu\\ (\pi_2)_{\#}\gamma=\nu\end{array}\right\} \qquad (K)$$

- ... puis à la formulation duale

$$\sup\left\{\int u(y)\,\mathrm{d}\nu(y)-\int u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\ :\ u\in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}^d)\right\} \qquad (D)$$

Formule de dualité

Sous de bonnes hypothèses sur μ,ν ($\mu\ll\mathcal{L}^d$), on a l'égalité

$$\inf(M)=\min(K)=\max(D)$$

Rayons de transport : définition

Si $u \in \mathrm{Lip}_1$ et $T_\# \mu = \nu$, une conséquence est que

$$\begin{array}{c} u(T(x)) - u(x) = |T(x) - x| \\ \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} T \text{ et } u \text{ sont optimaux} \\ \text{pour } (M) \text{ et } (D) \end{array}$$

Rayons de transport : définition

Si $u \in \mathrm{Lip}_1$ et $T_\# \mu = \nu$, une conséquence est que

$$\begin{array}{c} u(T(x)) - u(x) = |T(x) - x| \\ \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} T \text{ et } u \text{ sont optimaux} \\ \text{pour } (M) \text{ et } (D) \end{array}$$

On fixe u optimal pour (D) (potentiel de Kantorovitch) et on s'intéresse donc aux couples (x, y) tels que $u(y) - u(x) = |y - x|$.

Rayons de transport : définition

Si $u \in \mathrm{Lip}_1$ et $T_{\#}\mu = \nu$, une conséquence est que

$$\begin{array}{c} u(T(x)) - u(x) = |T(x) - x| \\ \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} T \text{ et } u \text{ sont optimaux} \\ \text{pour } (M) \text{ et } (D) \end{array}$$

On fixe u optimal pour (D) (potentiel de Kantorovitch) et on s'intéresse donc aux couples (x, y) tels que $u(y) - u(x) = |y - x|$.

Définition (rayons de transport)

Si $(x, y) \in \operatorname{supp}\mu \times \operatorname{supp}\nu$, on dit que $[x, y]$ est un

- *rayon de transport s'il vérifie $u(y) - u(x) = |y - x|$*
- *rayon de transport maximal s'il est de plus maximal pour cette propriété.*

Rayons de transport et transport optimaux

Propriétés géométriques des rayons de transport

- Deux rayons de transport maximaux distincts n'ont pas d'intersection, sauf éventuellement leurs extrémités
- Ces extrémités forment un ensemble $\mathcal{L}^d$-négligeable de $\mathbb{R}^d$

Ainsi, pour μ-presque tout x, **"le"** rayon de transport maximal passant par x est bien défini. On est ramené à une famille de problèmes 1D.

Rayons de transport et transport optimaux

Propriétés géométriques des rayons de transport

- Deux rayons de transport maximaux distincts n'ont pas d'intersection, sauf éventuellement leurs extrémités
- Ces extrémités forment un ensemble $\mathcal{L}^d$-négligeable de $\mathbb{R}^d$

Ainsi, pour μ-presque tout x, **"le"** rayon de transport maximal passant par x est bien défini. On est ramené à une famille de problèmes 1D.

Théorème : existence et caractérisation des transports optimaux

Les transports optimaux sont exactement les fonctions $T : \operatorname{supp}\mu \to \mathbb{R}^d$ tels que $T_{\#}\mu = \nu$ et, pour μ-presque tout x, $T(x)$ et x appartiennent au même rayon de transport.

Notation : $\mathcal{O}_1(\mu,\nu)$ est l'ensemble des transports optimaux et $W_1(\mu,\nu)$ la valeur minimale de (M).

Le transport optimal monotone

Il n'y a pas unicité du transport optimal pour Monge, mais l'un d'entre eux joue un rôle particulier :

Définition (Transport monotone)

On appelle transport monotone l'unique élément de $\mathcal{O}_1(\mu,\nu)$ qui est croissant sur chacun des rayons de transport.

Le transport optimal monotone

Il n'y a pas unicité du transport optimal pour Monge, mais l'un d'entre eux joue un rôle particulier :

Définition (Transport monotone)

On appelle transport monotone l'unique élément de $\mathcal{O}_1(\mu,\nu)$ qui est croissant sur chacun des rayons de transport.

Propriétés du transport monotone

- Il s'obtient comme limite de solutions du problème approché

$$\inf\left\{\int |T(x)-x|\,\mathrm{d}\mu(x)+\varepsilon\int |T(x)-x|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\ :\ T_\#\mu=\nu\right\}$$

- Il minimise la "distance quadratique" $\int |T(x)-x|^2\,\mathrm{d}\mu(x)$ dans l'ensemble $\mathcal{O}_1(\mu,\nu)$
- Certaines propriétés de régularité : *e.g.* continuité sous certaines hypothèses (2D, supports convexes et disjoints)

1. Le problème de Monge
2. Approximation en gradient
   - Généralités
   - Densité des transports lipschitziens et Γ-limite d'ordre zéro
   - Γ-limite d'ordre un
3. Approximation d'ordre $\varepsilon|\log\varepsilon|$

Approximation en gradient et Γ-convergence

On s'intéresse au comportement de la fonctionnelle

$$J_\varepsilon : T \mapsto \int |T(x) - x| \, \mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon \int |DT(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

définie sur l'ensemble des transports de μ à ν ; on cherche à voir quels éléments de $\mathcal{O}_1(\mu, \nu)$ sont "sélectionnés" par cette procédure, *i.e.* limites de minimiseurs de J_ε.

Approximation en gradient et Γ-convergence

On s'intéresse au comportement de la fonctionnelle

$$J_\varepsilon : T \mapsto \int |T(x) - x| \, \mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon \int |DT(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

définie sur l'ensemble des transports de μ à ν ; on cherche à voir quels éléments de $\mathcal{O}_1(\mu, \nu)$ sont "sélectionnés" par cette procédure, *i.e.* limites de minimiseurs de J_ε.

Définition (Γ-convergence)

On dit que $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ si, pour tout x,

- **pour tout** $x_n \to x$, $\liminf_n F_n(x_n) \geq F(x)$
- **il existe** $x_n \to x$ *telle que* $\limsup_n F_n(x_n) \leq F(x)$.

Si $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$, alors les valeurs minimales (resp. les minimiseurs) de F_n convergent vers celles (resp. ceux) de F.

Γ-limite "d'ordre zéro"

Le fait que $J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J_0$ nécessite un résultat de densité non trivial :

Théorème : densité des transports réguliers

Si μ, ν ont des densités $C^{0,\alpha}$ sur des supports étoilés et lipschitziens, alors l'ensemble des transports lipschitziens est dense (pour la convergence forte L^2) dans l'ensemble des transports de μ à ν.

(se démontre en utilisant un résultat de Dacorogna-Moser qui permet de construire un difféomorphisme lipschitzien entre deux mesures assez régulières)

Γ-limite "d'ordre zéro"

Le fait que $J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J_0$ nécessite un résultat de densité non trivial :

Théorème : densité des transports réguliers

Si μ, ν ont des densités $C^{0,\alpha}$ sur des supports étoilés et lipschitziens, alors l'ensemble des transports lipschitziens est dense (pour la convergence forte L^2) dans l'ensemble des transports de μ à ν.

(se démontre en utilisant un résultat de Dacorogna-Moser qui permet de construire un difféomorphisme lipschitzien entre deux mesures assez régulières)

Corollaire : Γ-limite d'ordre zéro

On a la Γ-convergence $J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J_0$. En particulier, les minimiseurs de J_ε convergent bien vers des éléments de $\mathcal{O}_1(\mu, \nu)$.

Γ-limite "d'ordre un"

Proposition (Γ-limite d'ordre un)

On a la Γ-convergence $(J_\varepsilon - W_1)/\varepsilon \to \mathcal{H}$, *où*

$$\mathcal{H}(T) = \begin{cases} \int |DT(x)|^2 \, \mathrm{d}x & \text{si } T \in \mathcal{O}_1(\mu,\nu) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, si $\mathcal{O}_1(\mu,\nu) \cap H^1 \neq \emptyset$, les minimiseurs de J_ε tendent vers ceux de J_0 qui ont la plus faible norme Sobolev, avec convergence d'ordre 1 en ε.

Γ-limite "d'ordre un"

Proposition (Γ-limite d'ordre un)

On a la Γ-convergence $(J_\varepsilon - W_1)/\varepsilon \to \mathcal{H}$, où

$$\mathcal{H}(T) = \begin{cases} \int |DT(x)|^2 \, \mathrm{d}x & \text{si } T \in \mathcal{O}_1(\mu,\nu) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, si $\mathcal{O}_1(\mu,\nu) \cap H^1 \neq \emptyset$, les minimiseurs de J_ε tendent vers ceux de J_0 qui ont la plus faible norme Sobolev, avec convergence d'ordre 1 en ε.

Remarque : ces derniers peuvent différer du transport monotone.

Γ-limite "d'ordre un"

Proposition (Γ-limite d'ordre un)

On a la Γ-convergence $(J_\varepsilon - W_1)/\varepsilon \to \mathcal{H}$, où

$$\mathcal{H}(T) = \begin{cases} \displaystyle\int |DT(x)|^2 \,\mathrm{d}x & \text{si } T \in \mathcal{O}_1(\mu,\nu) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

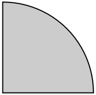
Ainsi, si $\mathcal{O}_1(\mu,\nu) \cap H^1 \neq \emptyset$, les minimiseurs de J_ε tendent vers ceux de J_0 qui ont la plus faible norme Sobolev, avec convergence d'ordre 1 en ε.

Remarque : ces derniers peuvent différer du transport monotone.

Si $\mathcal{O}_1(\mu,\nu) \cap H^1 = \emptyset$, sont inconnus l'ordre de convergence en ε et les transports sélectionnés à la limite.

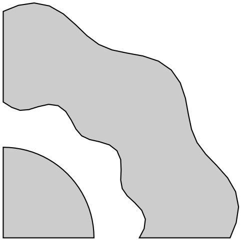
Un exemple spécifique dans le plan

Le domaine de départ Ω est le quart de disque $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (0, 1)\}$



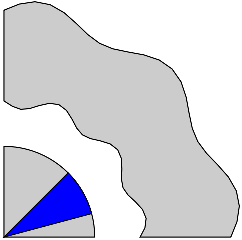
Un exemple spécifique dans le plan

Le domaine de départ Ω est le quart de disque $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (0,1)\}$ et le domaine d'arrivée Ω' est l'anneau $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (R_1(\theta), R_2(\theta))\}$.



Un exemple spécifique dans le plan

Le domaine de départ Ω est le quart de disque $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (0,1)\}$ et le domaine d'arrivée Ω' est l'anneau $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (R_1(\theta), R_2(\theta))\}$.

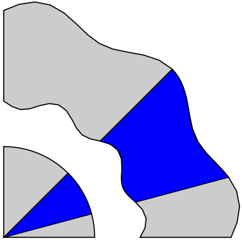


On suppose de plus que μ, ν ont des densités f, g telles que, pour chaque θ,

$$\int_0^1 f(r,\theta)\, r\, \mathrm{d}r =$$

Un exemple spécifique dans le plan

Le domaine de départ Ω est le quart de disque $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (0,1)\}$ et le domaine d'arrivée Ω' est l'anneau $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (R_1(\theta), R_2(\theta))\}$.

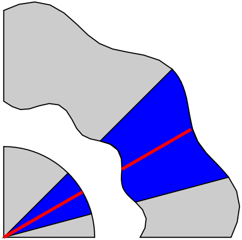


On suppose de plus que μ, ν ont des densités f, g telles que, pour chaque θ,

$$\int_0^1 f(r,\theta)\, r\, \mathrm{d}r = \int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)} g(r,\theta)\, r\, \mathrm{d}r$$

Un exemple spécifique dans le plan

Le domaine de départ Ω est le quart de disque $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (0,1)\}$ et le domaine d'arrivée Ω' est l'anneau $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (R_1(\theta), R_2(\theta))\}$.



On suppose de plus que μ, ν ont des densités f, g telles que, pour chaque θ,

$$\int_0^1 f(r,\theta)\, r\, \mathrm{d}r = \int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)} g(r,\theta)\, r\, \mathrm{d}r$$

de sorte que, pour chaque θ, il existe $\varphi(\cdot,\theta)$ envoyant la mesure $rf(r,\theta)\,\mathrm{d}r$ sur $rg(r,\theta)\,\mathrm{d}r$.

Structure des transports optimaux

Cette fonction T définie angle par angle est un transport de μ à ν, et vérifie $|T(x) - x| = |T(x)| - |x|$: T est donc optimal, et $|\cdot|$ est un potentiel de Kantorovitch.

Structure des transports optimaux

Cette fonction T définie angle par angle est un transport de μ à ν, et vérifie $|T(x) - x| = |T(x)| - |x|$: T est donc optimal, et $|\cdot|$ est un potentiel de Kantorovitch.

Proposition

Les transports optimaux sont exactement ceux qui préservent les angles ; autrement dit :

$$T \in \mathcal{O}_1(\mu, \nu) \Leftrightarrow T(x) = \varphi(x) \frac{x}{|x|}$$

Structure des transports optimaux

Cette fonction T définie angle par angle est un transport de μ à ν, et vérifie $|T(x) - x| = |T(x)| - |x|$: T est donc optimal, et $|\cdot|$ est un potentiel de Kantorovitch.

Proposition

Les transports optimaux sont exactement ceux qui préservent les angles ; autrement dit :

$$T \in \mathcal{O}_1(\mu, \nu) \Leftrightarrow T(x) = \varphi(x)\frac{x}{|x|}$$

En particulier, un tel T envoie 0 sur une "courbe" $\theta \mapsto \varphi(0, \theta)$: il présente une singularité à l'origine.

Corollaire

Il n'existe pas d'élément de $\mathcal{O}_1(\mu, \nu)$ qui appartienne à $H^1(\Omega)$.

Un calcul heuristique

On essaie de deviner la Γ-limite. On part de $T(x) = \varphi(x)\dfrac{x}{|x|}$ avec φ assez régulier et on définit T_ε en modifiant T seulement autour de l'origine :

$$T_\varepsilon(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } |x| \geq \delta \\ S(x) & \text{si } |x| \leq \delta \end{cases}$$

où S est assez régulier (pour que $T_\varepsilon \in H^1$) et δ est à fixer.

Un calcul heuristique

On essaie de deviner la Γ-limite. On part de $T(x) = \varphi(x)\frac{x}{|x|}$ avec φ assez régulier et on définit T_ε en modifiant T seulement autour de l'origine :

$$T_\varepsilon(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } |x| \geq \delta \\ S(x) & \text{si } |x| \leq \delta \end{cases}$$

où S est assez régulier (pour que $T_\varepsilon \in H^1$) et δ est à fixer.

Il y a trois termes à évaluer :

- (I) : la différence $\int_\Omega |T_\varepsilon(x) - x| \, \mathrm{d}\mu(x) - W_1$;
- (II) : l'énergie de Dirichlet $\int_{|x|\leq\delta} |DS(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ pour $|x|$ petit ;
- (III) : l'énergie de Dirichlet $\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ pour $|x|$ grand

(on a au total $J_\varepsilon(T_\varepsilon) - W_1 = (\mathrm{I}) + \varepsilon(\mathrm{II}) + \varepsilon(\mathrm{III})$).

Un calcul heuristique : terme (I)

Pour le 1er terme : $W_1 = \int |T(x) - x| \, d\mu(x)$, et T et T_ε coïncident là où $|x| \geq \delta$. De plus comme $T_\# \mu = (T_\varepsilon)_\# \mu = \nu$:

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq\delta} |T(x) - x| \, d\mu &= \int_{|x|\leq\delta} \Big(|T(x)| - |x| \Big) \, d\mu(x) \\ &= \int_{|x|\leq\delta} \Big(|S(x)| - |x| \Big) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

Un calcul heuristique : terme (I)

Pour le 1er terme : $W_1 = \int |T(x) - x| \, \mathrm{d}\mu(x)$, et T et T_ε coïncident là où $|x| \geq \delta$. De plus comme $T_\# \mu = (T_\varepsilon)_\# \mu = \nu$:

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq\delta} |T(x) - x| \, \mathrm{d}\mu &= \int_{|x|\leq\delta} \Big(|T(x)| - |x| \Big) \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{|x|\leq\delta} \Big(|S(x)| - |x| \Big) \, \mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|\leq\delta} \Big(|T - \mathrm{id}| - |S - \mathrm{id}| \Big) \, \mathrm{d}\mu \right| &\leq \int_{|x|\leq\delta} \Big| |S| - |\mathrm{id}| - |S - \mathrm{id}| \Big| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{|x|\leq\delta} 2|x| \, \mathrm{d}\mu(x) \leq C\delta^3 \, . \end{aligned}$$

En fin de compte, (I)$\leq C\delta^3$.

Un calcul heuristique : terme (II)

On veut évaluer

$$\int_{|x|\leq\delta} |DS(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

où S doit envoyer Ω_δ, qui est de diamètre δ, sur $T(\Omega_\delta)$, de façon régulière et avec une contrainte de mesure image.

Un calcul heuristique : terme (II)

On veut évaluer

$$\int_{|x|\leq\delta} |DS(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

où S doit envoyer Ω_δ, qui est de diamètre δ, sur $T(\Omega_\delta)$, de façon régulière et avec une contrainte de mesure image.

Ceci est possible grâce à Dacorogna-Moser si T est assez régulier. De plus, puisque Ω_δ est de diamètre δ et son image de diamètre borné supérieurement, on peut obtenir

$$\mathrm{Lip}\, S \leq \frac{C}{\delta}$$

et finalement (II) $= \int_{|x|\leq\delta} |DS(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq C$.

Un calcul heuristique : terme (III) et conclusion

Pour le dernier terme $\displaystyle\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2\,\mathrm{d}x$: on pose $T(x) = \varphi(x)\dfrac{x}{|x|}$

et alors

$$\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\delta^1 \int_0^{\pi/2} \left(\partial_r \varphi^2(r,\theta) + \frac{(\varphi^2 + \partial_\theta \varphi^2)(r,\theta)}{r} \right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Un calcul heuristique : terme (III) et conclusion

Pour le dernier terme $\displaystyle\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2\,\mathrm{d}x$: on pose $T(x)=\varphi(x)\dfrac{x}{|x|}$ et alors

$$\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\delta^1\int_0^{\pi/2}\left(\partial_r\varphi^2(r,\theta)+\frac{(\varphi^2+\partial_\theta\varphi^2)(r,\theta)}{r}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

On peut d'une part supposer $\partial_r\varphi$ borné. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 \|\varphi(r,\cdot)\|^2_{H^1(0,\pi/2)}\frac{\mathrm{d}r}{r} &= |\log\delta|\textstyle\int_0^1\|\varphi(\delta^t,\cdot)\|^2_{H^1}\,\mathrm{d}t\\ &\underset{\delta\to0}{\sim} |\log\delta|\|\varphi(0,\cdot)\|^2_{H^1}\end{aligned}$$

Un calcul heuristique : terme (III) et conclusion

Pour le dernier terme $\displaystyle\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2\,\mathrm{d}x$: on pose $T(x)=\varphi(x)\dfrac{x}{|x|}$ et alors

$$\int_{|x|\geq\delta} |DT(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\delta^1\int_0^{\pi/2}\left(\partial_r\varphi^2(r,\theta)+\frac{(\varphi^2+\partial_\theta\varphi^2)(r,\theta)}{r}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

On peut d'une part supposer $\partial_r\varphi$ borné. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 \|\varphi(r,\cdot)\|^2_{H^1(0,\pi/2)}\frac{\mathrm{d}r}{r} &= |\log\delta|\int_0^1 \|\varphi(\delta^t,\cdot)\|^2_{H^1}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{\delta\to 0}{\sim} |\log\delta|\|\varphi(0,\cdot)\|^2_{H^1}\end{aligned}$$

Finalement $(I)+\varepsilon\big((II)+(III)\big)=\varepsilon|\log\delta|\cdot\|\varphi(0,\cdot)\|^2_{H^1}+O(\varepsilon+\delta^3)$ et si on pose $\delta=\varepsilon^{1/3}$:

$$J_\varepsilon(T_\varepsilon)=W_1+\frac{1}{3}\varepsilon|\log\varepsilon|\cdot\|\varphi(0,\cdot)\|^2_{H^1}+O(\varepsilon)$$

La "Γ-limite" : notations

Ceci suggère de considérer la meilleure norme Sobolev parmi "les fonctions $\theta \mapsto \varphi(0, \theta)$ qui viennent d'un T optimal".

La "Γ-limite" : notations

Ceci suggère de considérer la meilleure norme Sobolev parmi "les fonctions $\theta \mapsto \varphi(0,\theta)$ qui viennent d'un T optimal". On pose donc

$$K = \inf\left\{\|\varphi\|_{H^1}^2 \ : \ R_1(\theta) \leq \varphi \leq R_2(\theta)\right\}$$

et on note Φ la fonction réalisant le minimum.

La "Γ-limite" : notations

Ceci suggère de considérer la meilleure norme Sobolev parmi "les fonctions $\theta \mapsto \varphi(0,\theta)$ qui viennent d'un T optimal". On pose donc

$$K = \inf \left\{ ||\varphi||^2_{H^1} \ : \ R_1(\theta) \leq \varphi \leq R_2(\theta) \right\}$$

et on note Φ la fonction réalisant le minimum. On introduit également

$$F_\varepsilon(T) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\int |T(x) - x| \, \mathrm{d}\mu(x) - W_1 - \frac{K}{3}\varepsilon|\log\varepsilon| \right)$$

et la "fonctionnelle cible" est définie par

$$F(T) = \int_0^1 \frac{||\varphi(r,\cdot)||^2_{H^1} - K}{r} \, \mathrm{d}r + \int_0^1 ||\partial_r \varphi(r,\cdot)||^2_{L^2} \, r \, \mathrm{d}r$$

si $T \in \mathcal{O}_1(\mu,\nu)$, $T(x) = \varphi(r,\theta)\dfrac{x}{|x|}$, et $+\infty$ sinon.

La "Γ-limite" : le résultat

Théorème

1. *Si $(F_\varepsilon(T_\varepsilon))_\varepsilon$ est bornée, alors il existe $(\varepsilon_k)_k$ et T tels que $T_{\varepsilon_k} \to T$ dans $L^2(\Omega)$.*
2. *Pour toute famille $T_\varepsilon \to T$, on a*
$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(T_\varepsilon) \geq F(T) - C$$
où C ne dépend que du domaine et des mesures.
3. *De plus, il existe au moins une famille $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que $(F_\varepsilon(T_\varepsilon))_\varepsilon$ est en effet bornée.*

La "Γ-limite" : le résultat

Théorème

1. *Si $(F_\varepsilon(T_\varepsilon))_\varepsilon$ est bornée, alors il existe $(\varepsilon_k)_k$ et T tels que $T_{\varepsilon_k} \to T$ dans $L^2(\Omega)$.*
2. *Pour toute famille $T_\varepsilon \to T$, on a*
$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(T_\varepsilon) \geq F(T) - C$$
où C ne dépend que du domaine et des mesures.
3. *De plus, il existe au moins une famille $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que $(F_\varepsilon(T_\varepsilon))_\varepsilon$ est en effet bornée.*

Remarque : ce n'est pas réellement un résultat de Γ-convergence, mais seulement une borne inférieure sur la Γ-liminf ; on conjecture que $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F - C'$, où C' est une constante explicite ne dépendant que du domaine et des mesures.

Conséquences sur les minimiseurs et la valeur du minimum

Les conséquences (à l'ordre $\varepsilon|\log\varepsilon|$) sont les mêmes qu'en cas de Γ-convergence vers $F - C$:

- sur la valeur du minimum : on a $\inf J_\varepsilon = \inf J + \frac{K}{3}\varepsilon|\log\varepsilon| + O(\varepsilon)$

Conséquences sur les minimiseurs et la valeur du minimum

Les conséquences (à l'ordre $\varepsilon|\log\varepsilon|$) sont les mêmes qu'en cas de Γ-convergence vers $F - C$:

- sur la valeur du minimum : on a $\inf J_\varepsilon = \inf J + \frac{K}{3}\varepsilon|\log\varepsilon| + O(\varepsilon)$
- sur le comportement des minimiseurs : si $T_\varepsilon \in \operatorname{argmin} J_\varepsilon$, alors $T_\varepsilon \to T$ avec
  - $T(x) = \varphi(r,\theta)\frac{x}{|x|}$

Conséquences sur les minimiseurs et la valeur du minimum

Les conséquences (à l'ordre $\varepsilon|\log\varepsilon|$) sont les mêmes qu'en cas de Γ-convergence vers $F - C$:

- sur la valeur du minimum : on a $\inf J_\varepsilon = \inf J + \frac{K}{3}\varepsilon|\log\varepsilon| + O(\varepsilon)$
- sur le comportement des minimiseurs : si $T_\varepsilon \in \operatorname{argmin} J_\varepsilon$, alors $T_\varepsilon \to T$ avec
  - $T(x) = \varphi(r,\theta)\frac{x}{|x|}$
  - $r \mapsto \varphi(r,\cdot)$ est continu $[0,1] \to L^2(0,\pi/2)$
  - $\varphi(0,\cdot) = \Phi$

(En particulier, selon la forme de Ω', T peut différer du transport monotone, et ne pas être injectif)