

Optimisation Topologique basée sur la Méthode M-SIMP pour la Conception Optimale de Circuits Électromagnétiques

Satafa **SANOGO**¹, Frédéric MESSINE², Carole HÉNAUX²

¹Université de Limoges/Xlim - DMI & MINACOM

²LAPLACE - GREM3, ENSEEIHT

JOURNÉES SMAI-MODE 2016

23 - 25 mars 2016 Toulouse

Plan

1 Motivations

2 Problème Modèle

3 Optimisation Topologique

- Méthodes d'Optimisation Topologique
- Approche M-SIMP
- Analyse de la Sensibilité

4 Application Numérique

- Programme ATOP^{TO}
- Design de Pièces Polaires pour un PEH

5 Conclusions

Part 1: Motivations

- 1 Motivations
- 2 Problème Modèle
- 3 Optimisation Topologique
- 4 Application Numérique
- 5 Conclusions

Motivations

① Développement de **Modèles Théoriques** et **Numériques** pour l'**Aide** à la **Conception Optimale** de *dispositifs électromagnétiques*.

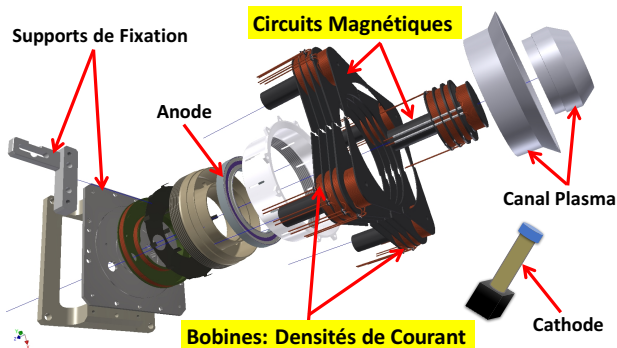
1. **Optimal**
2. **Automatique**
3. **Rationnel**
4. **Efficace**

Motivations

① Développement de **Modèles Théoriques** et **Numériques** pour l'Aide à la **Conception Optimale** de *dispositifs électromagnétiques*.

1. **Optimal** 2. **Automatique** 3. **Rationnel** 4. **Efficace**

② **Application:** Conception de **Circuits Magnétiques Optimaux** pour **Propulseur à Effet Hall (PEH)**.



Motivations

- Mise en œuvre d'Outils de Simulations permettant un design prenant en compte simultanément **plusieurs paramètres influents**,
- 👉 offrant des gains considérables en **Coût** et **Temps** d'élaboration des PEHs.



La CONCEPTION d'un PEH est Très DIFFICILE.

- ▶ En effet: **Problème Multi-Physique**. De plus:

$$\text{PerfoGlobal} = \text{fonction}(\text{PuissanceElectrique}) + \text{fonction}(\text{Geom}(\text{CanalPlasma})) + \text{fonction}(\text{Geom}(\text{CircMag}), \text{Topo}(\text{CircMag})).$$

Part 2: Problème Modèle

- 1 Motivations
- 2 Problème Modèle**
- 3 Optimisation Topologique
- 4 Application Numérique
- 5 Conclusions

Formulation du Problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{p}) \mathbf{J}(\mathbf{p}) d\Omega, & (1) \\ \text{s.c. :} \\ -\nabla \times [\nu(\mathbf{p}) \mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}(\mathbf{p}) = 0, \text{ dans } \Omega, \text{ avec } A|_{\partial\Omega} = 0, & (2) \\ \mathbf{p} \in \{\mathbf{p} \in \mathbf{L}^{\infty}(\Omega) : \mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}, \text{ et } \mathbf{p} \in \mathcal{P}_{cp}\}. & (3) \end{cases}$$

- $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}^s, \mathbf{p}^m\} := \{\mathbf{S}\text{ource}, \mathbf{M}\text{aterial}\}$; et, $\nu = 1/\mu$.
- A et \mathbf{B} sont les vecteurs potentiel et champ magnétique resp.
- On pose: $\Omega_m = \Omega_{m1} \cup \Omega_{m2}$, et $\Omega_T = \Omega_{T1} \cup \Omega_{T2}$,

$$\mathcal{P}_{cp} = \left\{ \mathbf{p} : \int_{\Omega_m} \mathbf{p}^m d\Omega = V_0, \mathcal{I}(\mathbf{p}^s) \leq 0, \mathcal{E}(\mathbf{p}^s) = 0, \mathbf{B}(A(\mathbf{p})) \in \mathcal{C}_{\Omega_T} \right\}.$$

- V_0 est une valeur limite sur la **quantité de matériaux** dans Ω_m ,
- $\mathcal{C}_{\Omega_T} = \{\mathbf{B} : \alpha_{\min} \leq \alpha(\mathbf{B}) \leq \alpha_{\max} \text{ in } \Omega_{T1}, \|\mathbf{B}\| \leq \mathbf{B}_{0,\max} \text{ in } \Omega_{T2}\}$.

Part 3: Optimisation Topologique

1 Motivations

2 Problème Modèle

3 Optimisation Topologique

- Méthodes d'Optimisation Topologique
- Approche M-SIMP
- Analyse de la Sensibilité

4 Application Numérique

5 Conclusions

Méthodes d'Optimisation Topologique

① Gradient Topologique

- ▶ Schumacher, Masmoudi, Sokolowski, ...

② Ligne de niveau

- ▶ Osher, Sethian, A.-Jouve-Toader, Allaire, ...

③ Homogénéisation

- ▶ Murat-Tartar, Bendsoe-Kikuchi, Allaire, ...

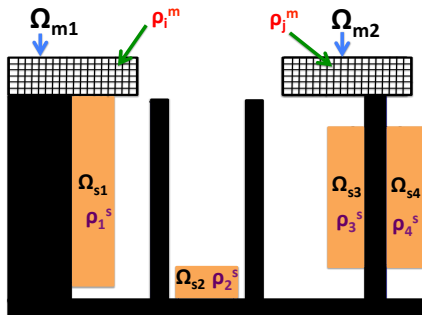
④ SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)

- ▶ Bendsøe, Sigmund, Rozvany, ...

Approche Mixed SIMP (M-SIMP) 1/2

- **Schéma d'Interpolation des Matériaux (SIM):**

$$\boldsymbol{\rho} = \{\boldsymbol{\rho}^s, \boldsymbol{\rho}^m\} = \{g_1(\boldsymbol{\rho}^s), g_2(\boldsymbol{\rho}^m)\}, \forall \boldsymbol{\rho} := \{\boldsymbol{\rho}^s, \boldsymbol{\rho}^m\} \in [0, 1] \times \{0, 1\}.$$



- **Nouvelles Variables:**

$$\rho^s(x) \in [0, 1], \forall x \in \Omega,$$

$$\rho^m(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \Omega_{\text{fer}}, \\ 0 & \text{for } x \in \Omega_{\text{vide}}. \end{cases}$$

- $g := \{g_1, g_2\} \rightarrow$ fonction d'interpolation,
- $\boldsymbol{\rho} := \{\boldsymbol{\rho}^s, \boldsymbol{\rho}^m\} \rightarrow$ fonction de densité.

Approche Mixed SIMP (M-SIMP) 2/2

- Formulation M-SIMP (**Continue**)

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\rho) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\rho} F(\rho), \\ \text{s.t. :} \\ h_A(\rho) = 0, \\ A_i \rho \leq b_i, \\ A_e \rho = b_e, \\ \mathcal{B}(\rho) \in \mathcal{C}_{\Omega_T}, \\ \mathbf{0} \leq \rho \leq \mathbf{1}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (4) \\ \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{array}$$

Approche Mixed SIMP (M-SIMP) 2/2

- Formulation M-SIMP (**Continue**)

$$(\mathcal{P}_\rho) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\rho} F(\rho), \quad (4) \\ \text{s.t. :} \\ h_A(\rho) = 0, \quad (5) \\ A_i \rho \leq b_i, \quad (6) \\ A_e \rho = b_e, \quad (7) \\ \mathcal{B}(\rho) \in \mathcal{C}_{\Omega_T}, \quad (8) \\ \mathbf{0} \leq \rho \leq \mathbf{1}. \quad (9) \end{array} \right.$$

- **Avantage:** Algorithmes de Type Gradient
- **Difficulté:** Si $\rho_{\text{opt}}^m \in]0, 1[$?
- **Stratégie:** *Choix judicieux d'un schéma g .*
 - ▶ Ainsi, on rend **non attractif** les **densités intermédiaires** par **pénalisation** (d'où le nom **SIMP**)

Analyse de la Sensibilité

Définition

La sensibilité du problème (\mathcal{P}_ρ) est la dérivée de F par rapport aux paramètres de conception \mathbf{p} ; elle est définie par:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{p} + \zeta) - F(\mathbf{p})}{\|\zeta\|} := F'(\mathbf{p}). \quad (10)$$

Proposition

La sensibilité de (\mathcal{P}) est donnée par:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \int_{\Omega} \left[2A \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{B}(A)^2 \right] d\Omega, \quad (11)$$

Où: A est la solution de l'équation de Maxwell,

$$-\nabla \times [\nu(\mathbf{p}) \mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}(\mathbf{p}) = 0, \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (12)$$

● Preuve: [A suivre...](#)

Analyse de la sensibilité: **Idée de la Preuve**

1 Lagrangien augmenté \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, A, \lambda) = F(\mathbf{p}) + \int_{\Omega} \lambda [-\nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(A)] + \mathbf{J}(\mathbf{p})] d\Omega. \quad (13)$$

2 Condition Nécessaire d'Optimalité du Premier Ordre (**KKT**)

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}(\mathbf{p}, A, \lambda), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} [\varphi \mathbf{J}(\mathbf{p}) - \nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(\varphi)\mathbf{B}(\lambda)] d\Omega. \quad (14)$$

3 Détermination du gradient de la fonction coût

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, A, \lambda) = F(\mathbf{p}), \quad \forall \lambda, \quad \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, A, \lambda) = F'(\mathbf{p}). \quad (15)$$

➔ **État Adjoint (Auto-Adjoint)**: Avec la CN d'optimalité sur A , on obtient,

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) - \nabla \times [\nu(\mathbf{p})\mathbf{B}(\lambda)] = 0, \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (16)$$

Part 4: Application Numérique

1 Motivations

2 Problème Modèle

3 Optimisation Topologique

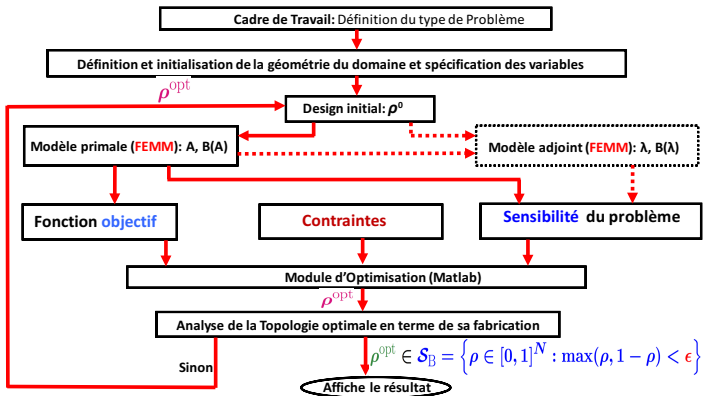
4 Application Numérique

- Programme ATOP^{T0}
- Design de Pièces Polaires pour un PEH

5 Conclusions

Programme ATOP^{TO} : Architecture

- ATOP^{TO}: **A**lgorithm **T**o **O**ptimize **P**ropulsion with **T**opology **O**ptimization method.
- Outils d'Analyse et Optimisation Numérique
 - ▶ Résolution des EDPs: FEMM [David Meeker, 2010]
 - ▶ Module d'Optimisation: MatLab [MathWorks, 1984 -...]



Application Numérique: Les **SIMs** utilisés

- Pour les densités des Sources ρ^s : **SIM linéaire**

$$g_1^l(\rho^s) = \mathbf{p}_{\min}^s + (\mathbf{p}_{\max}^s - \mathbf{p}_{\min}^s)\rho^s. \quad (17)$$

- Pour les densités de Matériaux ρ^m : **SIM Uniforme**

$$g_n^u(\rho^m) = \mathbf{p}_{\min}^m + \frac{\mathbf{p}_{\max}^m - \mathbf{p}_{\min}^m}{n} \sum_{i=1}^n (\rho^m)^i. \quad (18)$$



Pour plus de détails



S. Sanogo, F. Messine, C. Henaux and R. Vilamot, *Topology Optimization for Magnetic Circuits dedicated to Electric Propulsion*, *IEEE Trans. on Mag*: vol. 50, no. 12, 2014.



S. Sanogo, *Conception Optimale de Circuits Magnétiques dédiés à la Propulsion Spatiale Électrique par des Méthodes d'Optimisation Topologique*, Thèse de Doctorat, LAPLACE, UPS-Toulouse, France, Février 2016.

Application Numérique: Les Données du Problème

1 Les bornes du paramètre de conception $\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{p}^s, \boldsymbol{p}^m\}$:

- Sources: $\{\boldsymbol{p}_{\min}^s, \boldsymbol{p}_{\max}^s\} = \{-3, +3\}$ (A/mm²)
- Matériau: $\{\boldsymbol{p}_{\min}^m, \boldsymbol{p}_{\max}^m\} = \{4\pi 10^{-7}, 4\pi 10^{-7} \times 8000\}$ (H/m)

2 Nombre de Variable du problème Discret:

$$N = \underbrace{4}_{\rho^s = (\rho_1^s, \dots, \rho_4^s)} \text{ (Sources)} + \underbrace{2 \times 30 \times 15}_{\rho^m = (\rho_1^m, \dots, \rho_{900}^m)} \text{ (Matériel)} = \underbrace{904}_{\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{904})}$$

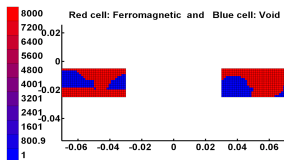
3 Contraintes:

- ▶ Sources: $\rho_3^s = \rho_4^s$ et $\sum \rho_i^s \leq 2$, ▶ $\alpha \in [-10^\circ, +10^\circ]$,
- ▶ Matériau: $\implies \sum \rho_i^m v_i = V_0$, ▶ $\mathbf{B}_{0,\max} = 0,04\text{T}$.

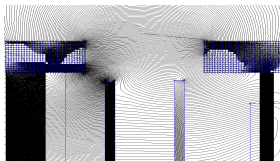
4 SIM: $\rho^s \rightsquigarrow n_1 = 1$, et $\rho^m \rightsquigarrow n_2 = 50$.

Résultats Numériques #1: $V_0 = 60\% * Vol(\Omega_m)$

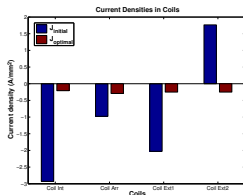
Cas Test	NbIter	$F^0 \rightarrow F^{opt}$	J_1^{opt}	J_2^{opt}	J_3^{opt}	J_4^{opt}	cpu-t (min)
T1: $v_0 = 60\%$	110	35.5 \rightarrow 0.48	-0.21	-0.29	-0.25	-0.25	130



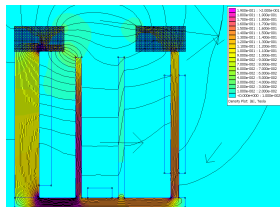
(a) Topologie Optimale



(b) Dist. du Flux Mag.



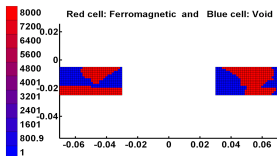
(c) Densités de Courant Optimales



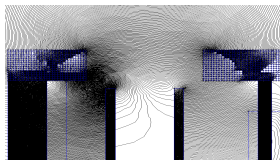
(d) Intensité du Champ Mag.

Résultats Numériques #2: $V_0 = 50\% * Vol(\Omega_m)$

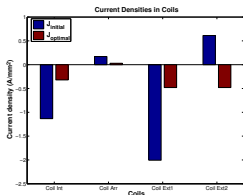
Cas Test	NbIter	$F^0 \rightarrow F^{opt}$	J_1^{opt}	J_2^{opt}	J_3^{opt}	J_4^{opt}	cpu-t (min)
T2: $V_0 = 50\%$	172	7.2 \rightarrow 0.96	-0.32	+0.030	-0.48	-0.48	162



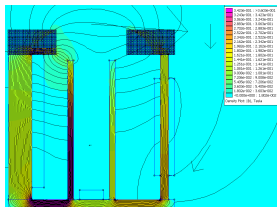
(a) Topologie Optimale



(b) Dist. du Flux Mag.



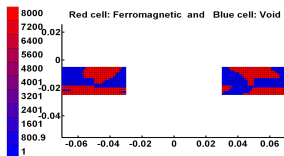
(c) Densités de Courant Optimales



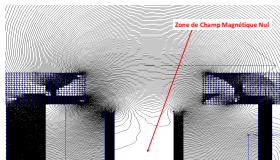
(d) Intensité du Champ Mag.

Résultats Numériques #3: $V_0 = 40\% * Vol(\Omega_m)$

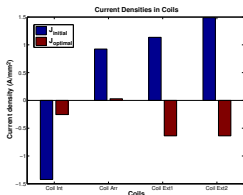
Cas Test	NbIter	$F^0 \rightarrow F^{opt}$	J_1^{opt}	J_2^{opt}	J_3^{opt}	J_4^{opt}	cpu-t (min)
T3: $v_0 = 40\%$	138	2.38 \rightarrow 0.99	-0.25	+0.035	-0.61	-0.61	290



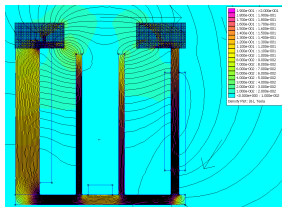
(a) Topologie Optimale



(b) Dist. du Flux Mag.



(c) Densités de Courant Optimales



(d) Intensité du Champ Mag.

Part 5: Conclusions

- 1 Motivations
- 2 Problème Modèle
- 3 Optimisation Topologique
- 4 Application Numérique
- 5 Conclusions**

Conclusions et Perspectives

- **Résumé**

- ▶ Mise en place d'une famille de codes robustes et efficaces **ATOP** pour la **conception optimale** des Circuits Électromagnétiques.
- ▶ Les Gains en Masse de Matériaux varient entre **30%** et **60%**.

- **Perspectives**

- ▶ **Hybridation avec les Méthodes d'Optimisation de forme Géométrique.**
- ▶ **Optimisation des Performances globales des PEHs.**

FIN

Merci Pour Votre Attention !!!