

Contrôle temps-minimal de l'attitude d'un lanceur (Minimum time control of the attitude reorientation for a launcher)

Jiamin ZHU

Colaboration: Emmanuel Trélat, Max Cerf

Laboratoire Jacques-Louis Lions

Université Pierre et Marie CURIE

zhu@ann.jussieu.fr

March 22, 2016

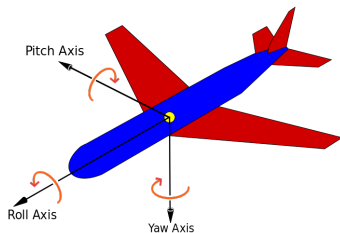
Attitude?

- Trajectoire \neq Attitude

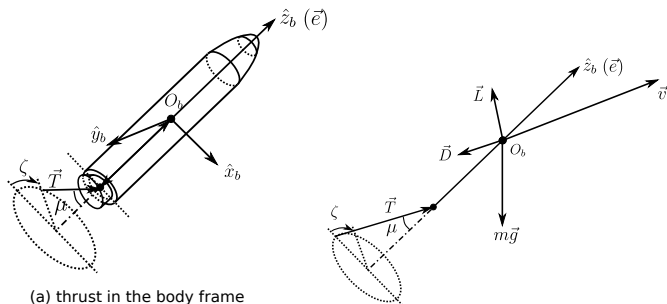
- un point de masse m
- \vec{r} - position, \vec{v} - vitesse

- Attitude

- orientation θ, ψ, ϕ (angles d'Euler: tangage, lacet, roulis)
- vitesse angulaire $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$
- attention: $\dot{\theta} \neq \omega_x, \dot{\psi} \neq \omega_y, \dot{\phi} \neq \omega_z!$



Couplage entree trajectoire et attitude



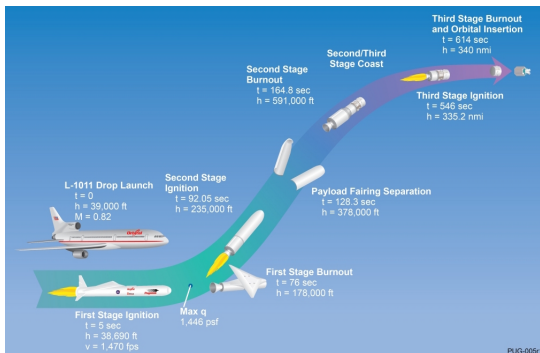
- trajectoire: contrôlée par direction \vec{e}
 - dynamique de la trajectoire: $\dot{\vec{v}} = T\vec{e}/m + \vec{g} + (\vec{L} + \vec{D})/m$
 - module de poussée \vec{T} constant T : $\vec{T} = T \cos \mu \vec{e} \approx T \vec{e}$
 - \vec{e} exprimé par les angles d'Euler
- propulseur flexible: $\mu, \xi \rightarrow$ couple \rightarrow contrôler direction \vec{e}

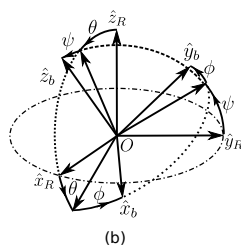
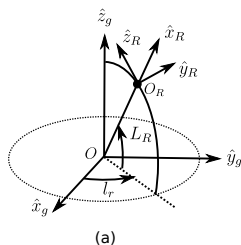
- Dans l'industrie

- découplage
 - trajectoire: planifier une trajectoire (nominale)
 - attitude: contrôlé par un contrôle feedback
- raison:
évolution de l'attitude rapide, trajectoire lente (propriété importante !)
- plus facile à résoudre avec le découplage

Manœuvre de pull-up d'un lanceur aéroporté

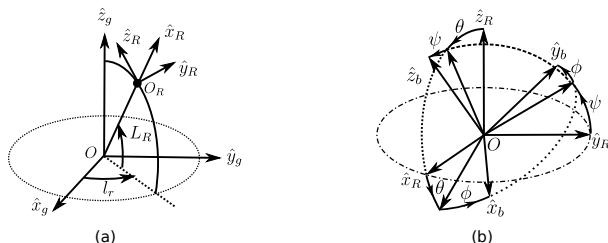
- lancé horizontalement
- manœuvre de pull-up → attitude:
angle tangage va de -10/0 degrés à 15/90 degrés
- couplage non-négligeable !
- direction de vitesse: $\vec{v}(t_f) // \vec{e}(t_f)$





- $S_R = (\hat{x}_R, \hat{y}_R, \hat{z}_R)$: repère de lancement;
dans lequel s'exprime la dynamique de la trajectoire.
- $S_b = (\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b)$: repère de corps
dans lequel s'exprime la dynamique de l'attitude.

Cinématique de l'attitude

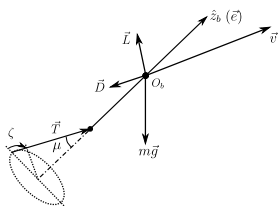


- angles d'Euler sont définis par trois rotations séquentielles

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = L_{bR} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\psi} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

où L_{bR} matrice de transformation du repère S_R au repère S_b

Dynamique de la trajectoire et de l'attitude



- Dynamique de la trajectoire

$$\dot{\vec{v}} = T\vec{e}/m + \vec{g} + (\vec{L} + \vec{D})/m$$

$$(\vec{v})_R = (v_x, v_y, v_z), (\vec{e})_R = (\sin\theta \cos\psi, -\sin\psi, \cos\theta, \cos\psi)$$

- Dynamique de l'attitude

$$I \frac{d(\vec{\omega})_b}{dt} = -(\vec{\omega})_b \times (I\vec{\omega})_b + (\vec{M})_b$$

$$(\vec{M})_b = T(-\sin\mu \cos\xi, -\sin\mu \sin\xi, \cos\mu)$$

I - matrice d'inertie;

- $(\vec{\omega})_b = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

Système affine bi-entrée

- hypothèses:

lanceur ne tourne pas sur lui-même $\omega_z = 0$;

masse m constante, module de propulsion T constant;

terre ronde, fixé dans l'espace inertiel.

- état fixé: $x = (v_x, v_y, v_z, \theta, \psi, \phi, \omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}^8$

- contrôle: $u = (u_1, u_2) := \frac{\mu}{\mu_{max}} (\cos \xi, \sin \xi) \in \mathbb{R}^2, \|u\| \leq 1$

- système affine bi-entrée:

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x)$$

Système affine bi-entrée

- champs de vecteur lissent:

$$\begin{aligned} f &= (a \sin \theta \cos \psi + g_x + L_x + D_x) \frac{\partial}{\partial v_x} \\ &+ (-a \sin \psi + g_y + L_y + D_y) \frac{\partial}{\partial v_y} \\ &+ (a \cos \theta \cos \psi + g_z + L_z + D_z) \frac{\partial}{\partial v_z} \\ &+ (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) / \cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ (\omega_x \cos \phi - \omega_y \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \psi} \\ &+ (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) \tan \psi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ g_1 &= \bar{b} \frac{\partial}{\partial \omega_y}, \quad g_2 = -\bar{b} \frac{\partial}{\partial \omega_x} \end{aligned}$$

Formulation de problème

- **Problème:** (\mathcal{P}_0) minimiser t_f tel que

- (système) $\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^8$, $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| \leq 1$,
- (condition initiale) $x(0) = x_0$,
- (condition finale) $x(t_f) \in M_1$,
 $M_1 = \{x(t_f) | \vec{v}(t_f) // \vec{e}(t_f), \theta(t_f) = \theta_f, \psi(t_f) = \theta_f, \phi(t_f) = \theta_f, \vec{\omega}(t_f) = \vec{\omega}_f\}$
- contraintes sur l'état (en cas de lanceur aéroportée),
 - pression dynamique, load factor, ...
 - formuler en $S(x) \leq 0$
 - Principe du maximum \rightarrow trop difficile \rightarrow Méthode de pénalisation

sont vérifiées.

- **Problème:** (\mathcal{P}_0) \rightarrow (\mathcal{P}) problème sans constraints:

- minimiser $t_f + \int_0^{t_f} P(x(t), K_s) dt$
- $P(x(t), K_s)$ fonction de pénalisation, $K_s > 0$
- $P(x(t), K_s) > 0$ si $S(x) > 0$, $P(x(t), K_s) = 0$ si $S(x) \leq 0$

Application de Principe du Maximum de Pontryagin

- vecteur adjoint $p(t)$, réel $p^0 \leq 0$,
- $(p, p^0) \neq 0$ est défini à scalaire multiplicatif près
- équations d'extrémalees:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, p^0, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, p^0, u)$$

- Hamiltonien:

$$H(x, p, p^0, u) = h_0 + u_1 h_1 + u_2 h_2 + p^0(1 + P(x, K_s)),$$

où $h_0(t) = \langle p, f(x) \rangle$,

- fonction de commutation:

$$h(t) = (h_1(t), h_2(t)) := (\langle p(t), g_1(x(t)) \rangle, \langle p(t), g_2(x(t)) \rangle)$$

- condition de maximisation:

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{\|v\| \leq 1} H(x(t), p(t), p^0, v(t))$$
$$\rightarrow u_1(x, p) = \frac{h_1(x, p)}{\|h(x, p)\|}, \quad u_2(x, p) = \frac{h_2(x, p)}{\|h(x, p)\|} \quad \text{quand } \|h\| \neq 0$$

- condition de transversalité

$$p(t_f) \perp M_1 \rightarrow \Phi(x(t_f), p(t_f)) = 0$$

Problème aux valeurs limitées

- inconnus: t_f et $p(0)$
- contrôle optimal $u = u(x, p)$
- équations d'extrémales:
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u(x, p)), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u(x, p))$$
- condition initiale: $x(0) = x_0$
- condition finale: $\theta(t_f) = \theta_f, \psi(t_f) = \psi_f, \phi(t_f) = \phi_f,$
 $\vec{\omega}(t_f) = \vec{0}, \vec{v}(t_f) \wedge \vec{e}(t_f),$
- condition de transversalité $\Phi(\vec{v}(t_f), p(t_f)) = 0$
- Hamiltonian $H(t_f) = 0$

Méthode de tir

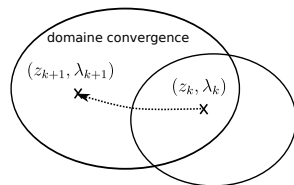
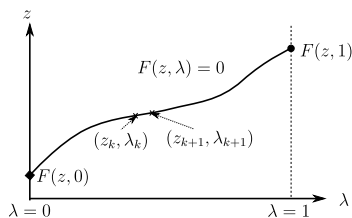
- chercher $(t_f^*, p(0)^*)$ tel que $T(t_f, p(0)) = 0$
fonction de tir $T(t_f, p(0))$

$$= \begin{pmatrix} \vec{v}(t_f) \wedge \vec{e} \\ \Phi(\vec{v}(t_f), p(t_f)) \\ \theta(t_f) - \theta_f \\ \psi(t_f) - \psi_f \\ \phi(t_f) - \phi_f \\ \vec{\omega}(t_f) - \vec{\omega}_f \end{pmatrix} = 0$$

- méthode itérative: Newton, gradient conjugué, etc.
- problème: comment trouver $(t_f, p(0))$ près de $(t_f^*, p(0)^*)$?
 - Méthode directe (pas assez précise et trop lente)
 - Méthode d'homotopie

Méthode d'homotopie

- résoudre un problème difficile depuis un problème simplifié
- soit $z = (t_f, p(0)) \in \mathbb{R}^m$
- λ : paramètre d'homotopie
- $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$
chercher (z, λ) t.q. $F(z, \lambda) = 0$
 $F(z, 1) = T(z)$: fonction de tir
 $F(z, 0) = G(z)$: la solution $G(z) = 0$ est connue

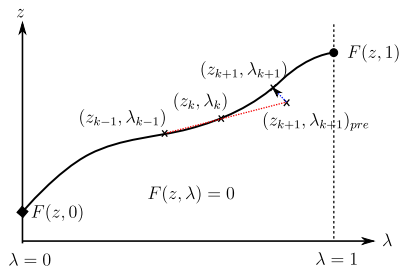


Méthode d'homotopie

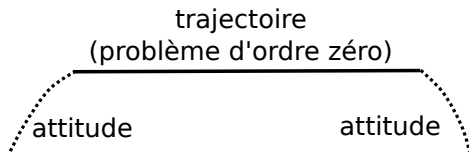
- homotopie discrete

- $\lambda = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_N = 1$
- résoudre $F(z_{k+1}, \lambda_{k+1}) = 0$ avec l'initialisation (z_k, λ_k)
- si $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ petit, z_k est proche de z_{k+1}
- déformer λ de 0 à 1 falcon croissant

- homotopie prédicteur-correcteur



- stratégie numérique
 - problème d'ordre zéro
 - λ_1 et λ_2 introduisent les conditions terminales
 - λ_3 introduit les forces aérodynamiques
 - λ_4 introduit les contraintes sur l'état



Problème d'ordre zéro

- propriété: attitude rapide & trajectoire lente

- problème d'ordre zéro:

min t_f tel que

$$\dot{\vec{v}} = T/m\vec{e} + \vec{g},$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0, \vec{v}(t_f) // \vec{w}.$$

\vec{e} contrôle, \vec{v} état, T/m constant

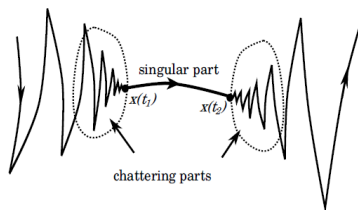
- solution optimale: $\vec{e}(t) = \vec{e}^*$, $\vec{p}_v(t) = \vec{p}_v^*$

→ soit $x^* = (\vec{v}_0, \theta^*, \psi^*, 0, 0, 0)$

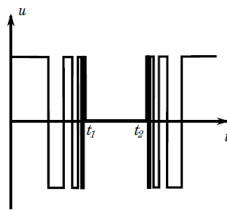
- soit $x(0) = x_0\lambda_1 + (1 - \lambda_1)x^*$

- varier λ_1 de 0 à 1 → ne fonctionne pas! pourquoi?

Chattering



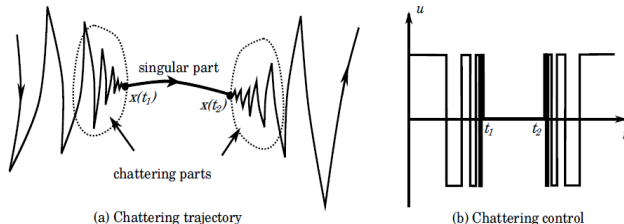
(a) Chattering trajectory



(b) Chattering control

- chattering (phénomène de Fuller)
 - en cas contrôle scalaire: contrôle commute infiniment sur un interval compact
 - en cas contrôle multiple: fonction de commutation commute infiniment sur un intervalle compact
- catastrophe pour les méthodes numériques!

Chattering



- chattering: avec le contrôle singulier d'ordre 2.
 - contrôle singulier d'ordre q apparaît linéairement dans la dérivée d'ordre $2q$ de la fonction de commutation.
- existence démontée par l'absurde

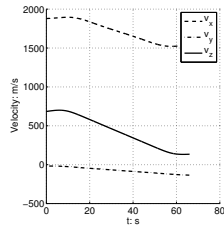
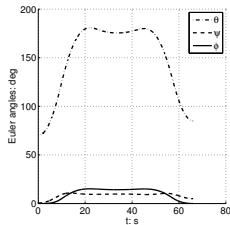
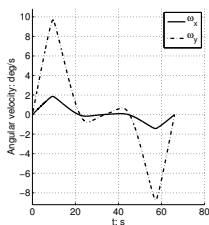
Problème régularisé

- $\min t_f + K \int_0^{t_f} \|u\|^2 dt$
- application du PMP
$$H_K(x, p, p^0, u) = H(x, p, p^0, u) + p^0(K\|u\|^2)$$
$$u(t) = \max_{\|v\| \leq 1} H(x, p, p^0, v)_K$$
- Avantage → enlever l'arc singulier
→ enlever l'arc chattering!
→ plus facile à résoudre

- Résoudre le problème d'ordre zéro
- Résoudre le problème régularisé
 - varier λ_1 et λ_2 de 0 à 1:
introduire les conditions terminales sur l'attitude
 - varier λ_3 de 0 à 1: introduire forces aérodynamiques
 - varier λ_4 de 0 à 1: introduire contraintes sur l'état
- Résoudre le problème original
 - varier K de K à K_0
 - si $K_0 = 0$, on arrive à une solution optimale
 - si $K_0 > 0$, on arrive à une solution sous-optimale

Solution numérique

- Fortran (méthode de tir avec hybrid.f)
- quelques secondes
- cas tests avec les conditions terminales différentes
- Phénomène turnpike (sans les contraintes sur l'état)



Voir plus de détails:

- J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf, Planar tilting maneuver of a spacecraft: singular arcs in the minimum time problem and chattering, *Discrete Cont. Dynam. Syst. Ser. B*, 2016, vol 21, no. 4.
- J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf, Minimum time control of the rocket attitude reorientation associated with orbit dynamics, *SIAM J. Cont. Optim.*, 2016, vol. 54, no. 1, p. 391-422.
- J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf, Minimum time-energy pull-up maneuvers for airborne launch vehicles, *Preprint Hal*, 2016, 24 pages.

Merci de votre attention !